۹ مرکز جرم و اندازه حرکت خطی

●۱- یک ذرهٔ $2.00\,kg$ دارای مختصه‌های xy $(-1.20\,m, 0.500\,m)$ و یک ذرهٔ $4.00\,kg$ دارای مختصه‌های xy $(0.600\,m, -0.750\,m)$ است. هر دو در یک صفحهٔ افقی واقع‌اند. در چه مختصه‌های (الف) x و (ب) y باید یک ذرهٔ $3.00\,kg$ را قرار داد به طوری که مرکز جرم دستگاه سه- ذره دارای مختصه‌های $(-0.500\,m, -0.700\,m)$ باشد؟

حل: (الف) طبق تعریف مختصهٔ x مرکز جرم برابر است با

$$x_{com} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$-0.500 = \frac{(2.00)(-1.2) + (4.00)(0.6) + (3.00)x_3}{2.00 + 4.00 + 3.00}$$

$$\Rightarrow x_3 = -1.5\,m$$

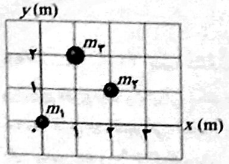
(ب) مختصهٔ y مرکز جرم نیز طبق تعریف برابر است با

$$y_{com} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$-0.700 = \frac{(2.00)(0.500) + (4.00)(-0.750) + (3.00)y_3}{2.00 + 4.00 + 3.00}$$

$$\Rightarrow y_3 = -1.43\,m$$

●۲- شکل ۹-۳۷ یک دستگاه سه ذره‌ای با جرمهای $m_1 = 3.0\,kg$، $m_2 = 4.0\,kg$ و $m_3 = 8\,kg$ را نشان می‌دهد. مقیاس روی محورها با $x_s = 2.0\,m$ و $y_s = 2.0\,x$ مشخص شده است. (الف) مختصهٔ x و (ب) مختصهٔ y مرکز جرم دستگاه چقدرند؟ (پ) اگر m_3 به تدریج افزایش یابد آیا مرکز جرم دستگاه به سمت آن یا به دور از آن ذره جابه‌جا می‌شود یا ساکن باقی می‌ماند؟



شکل ۹-۳۷ مسئلهٔ ۲

حل: ذرهٔ m_1 را در مبدا دستگاه مختصات در نظر می‌گیریم، در نتیجه $x_1 = 0$ و $y_1 = 0$ است و مختصات m_2 برابر $x_2 = 2.0\,m$ و $y_2 = 1.0\,m$ و مختصات m_3 برابر $x_3 = 1.0\,m$ و $y_3 = 2.0\,m$ است.

(الف) مختصهٔ x مرکز جرم برابر است با

$$x_{com} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{0 + (4.0\,kg)(2.0\,m) + (8.0\,kg)(1.0\,m)}{3.0\,kg + 4.0\,kg + 8.0\,kg} = 1.1\,m$$

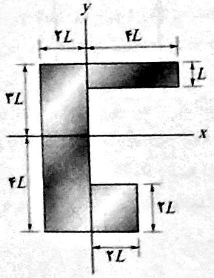
(ب) مختصهٔ y مرکز جرم برابر است با

$$y_{com} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{0 + (4.0\,kg)(1.0\,m) + (8.0\,kg)(2.0\,m)}{3.0\,kg + 4.0\,kg + 8.0\,kg} = 1.3\,m$$

(پ) وقتی m_3 افزایش یابد مرکز جرم دستگاه به طرف آن منتقل می‌شود.

●●۳- (الف) مختصهٔ x و (ب) مختصهٔ y مرکز جرم برای ورق یکنواخت نشان داده شده در شکل ۹-۳۸ اگر $L = 5.0\,cm$ باشد، چقدر است؟



شکل ۹-۳۸ مسئلهٔ ۳

حل: چون ورق یکنواخت فرض شده لذا می‌توان نوشت $m = \sigma A$ که در آن σ چگالی سطحی جرم است. در اینجا ورق از سه قسمت تشکیل شده است و با توجه به شکل و دستگاه مختصات نشان داده شده جرم هر قسمت و مرکز جرم آنها به قرار زیر است.

قسمت سمت چپ $m_1 = \sigma A_1 = \sigma(7L \times 2L) = 14\sigma L^2$

$x_1 = -L$

$y_1 = -0.5L$

قسمت بالا و سمت راست $m_2 = \sigma A_2 = \sigma(4L \times L) = 4\sigma L^2$

$x_2 = 2L$

$y_2 = 2.5L$

قسمت پایین و سمت راست $m_3 = \sigma A_3 = \sigma(2L \times 2L) = 4\sigma L^2$

$x_3 = L$

$y_3 = -3L$

(الف) طبق تعریف مختصهٔ x مرکز جرم ورق برابر است با

$$x_{com} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad x_{com} = -0.09L$$

$$x_{com} = -0.45\,cm$$

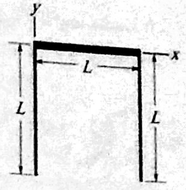
(ب) مختصهٔ y مرکز جرم ورق برابر است با

$$y_{com} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_{com} = -\frac{9}{22}L = -2.04\,cm$$

توجه: به علامت یکنواخت بدون ورق چگالی σ از صورت و مخرج حذف شده است.

●●۴- در شکل ۹-۳۹ سه میلهٔ یکنواخت باریک هر یک به طول $L = 22\,cm$ تشکیل یک U وارونه را داده‌اند. میله‌های قائم هر یک دارای جرم $14\,g$ هستند و میلهٔ افقی $42\,g$ جرم دارد. (الف) مختصهٔ x و (ب) مختصهٔ y مرکز جرم دستگاه چقدر است؟



شکل ۹-۳۹ مسئلهٔ ۴

حل:
با توجه به صورت مسئله جرم میلهٔ افقی سه برابر جرم میله عمودی است و با درنظر گرفتن دستگاه مختصات برای هر میله می‌توان نوشت:

میلهٔ سمت چپ: $m_1 = M$ ، $x_1 = 0$ ، $y_1 = -L/2$

میلهٔ بالایی: $m_2 = 3M$ ، $x_2 = L/2$ ، $y_2 = 0$

میله سمت راست: $m_3 = M$ ، $x_3 = L$ ، $y_3 = -L/2$

(الف) مختصهٔ x مرکز جرم دستگاه طبق تعریف برابر است با

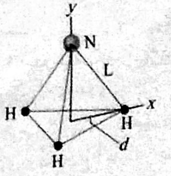
$$x_{com} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \Rightarrow x_{com} = 0.5L = 11\text{cm}$$

(ب) مختصهٔ y مرکز جرک دستگاه برابر است با

$$y_{com} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \Rightarrow y_{com} = -0.2L = -4.4\text{cm}$$

توجه: چنانچه دستگاه مختصات دیگری را در نظر می‌گرفتیم اعداد متفاوتی به دست می آمد ولی توجه داریم که محل مرکز دستگاه با انتخاب دستگاه مختصات تغییر نمی‌کند.

••۵- در مولکول آمونیاک (NH_3) شکل ۹-۴۰، سه اتم هیدروژن (H) مثلث متساوی الاضلاعی را تشکیل می‌دهند که مرکز آن به فاصلهٔ $d = 9.40 \times 10^{-11}$ m از هر اتم هیدروژن قرار دارد. اتم نیتروژن (N) در رأس یک هرم است، که سه اتم هیدروژن قاعدهٔ آن را تشکیل می‌دهند. نسبت جرم اتمی نیتروژن به هیدروژن برابر ۱۳/۹ و فاصلهٔ نیتروژن تا هیدروژن $L = 10.14 \times 10^{-11}$ m است. مختصهٔ (الف) x و (ب) y مرکز جرم مولکول چقدر است؟ **ILW**



شکل ۹-۴۰ مسئلهٔ ۵

حل: (الف) ابتدا به تقارن مسئله توجه می‌کنیم. محور y، محور تقارن شکل است و می‌دانیم که مرکز جرم روی این محور است لذا $x_{com} = 0$ است

(ب) اتم‌های هیدروژن در صفحه xz واقع‌اند پس برای آنها $y_H = 0$ است در نتیجه برای مختصهٔ y مرکز جرم می‌توان نوشت

$$y_{com} = \frac{3m_H(0) + m_N(y_N)}{3m_H + m_N}$$

حال باید y_N را محاسبه کرد. مرکز تقارن را مبدأ O می‌نامیم و با توجه به شکل می‌توان نوشت

$$y_N = ON = \sqrt{NH^2 - OH^2} = \sqrt{L^2 - d^2}$$
$$= \sqrt{(10.14 \times 10^{-11}\text{ m})^2 - (9.40 \times 10^{-11}\text{ m})^2}$$
$$= 3.803 \times 10^{-11}\text{ m}$$

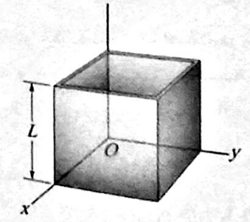
y_{com} را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$y_{com} = \frac{\frac{m_N}{m_H} y_N}{3 + \frac{m_N}{m_H}}$$

اما $\frac{m_N}{m_H} = 13.9$ داده شده است لذا خواهیم داشت

$$y_{com} = \frac{(13.9)(3.803 \times 10^{-11}\text{ m})}{3 + 13.9}$$
$$= 3.13 \times 10^{-11}\text{ m}$$

••۶- شکل ۹-۴۱ جعبهٔ مکعب شکلی را نشان می‌دهد که از ورقه‌ای فلزی با چگالی یکنواخت ساخته شده و ضخامت صفحه قابل چشمپوشی است. وجه بالایی جعبه باز و طول هر یال جعبه $L = 40$ cm است. مطلوب است محاسبهٔ (الف) مختصهٔ x، (ب) مختصهٔ y و (پ) مختصهٔ مرکز جرم جعبه.



شکل ۹-۴۱ مسئلهٔ ۶

حل: می‌توان فرض کرد که جعبه مکعبی شکل از شش وجه تشکیل شده و لذا جرم و مرکز جرم هر وجه را در نظر می‌گیریم. جرم‌ها یکسان‌اند، $m = \sigma A$ ، و مرک جرم‌ها با توجه به دستگاه مختصات و مبدأ O عبارتند از: در صفحهٔ ۱، xy؛ (۲۰,۲۰,۰)، در صفحهٔ ۲، xz؛ (۲۰,۰,۲۰)، در صفحهٔ ۳، yz؛ (۰,۲۰,۲۰)؛ در صفحه ۴، xz با $y = 40$ cm؛ (۲۰,۴۰,۲۰)، در صفحه ۵، yz با $x = 40$ cm؛ (۴۰,۲۰,۲۰).
حال با توجه به تعریف مرکز جرم برای کل جعبه مکعبی شکل

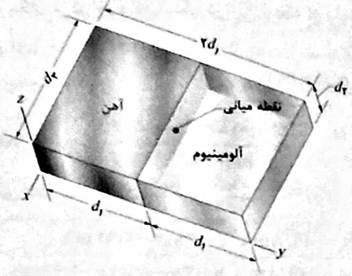
(الف)
$$x_{com} = \frac{mx_1 + mx_2 + mx_3 + mx_4 + mx_5}{5m}$$
$$= \frac{20 + 20 + 0 + 20 + 40}{5} = 20\text{cm}$$

با حذف m از صورت و مخرج

(ب) به طور مشابه
$$y_{com} = \frac{20 + 0 + 20 + 40 + 20}{5} = 20\text{cm}$$

(پ) به طور مشابه
$$z_{com} = \frac{0 + 20 + 20 + 20 + 20}{5} = 16\text{cm}$$

••۷- شکل ۹-۴۲ اضلاع یک قطعه را با ابعاد $d_1 = 11.0$ cm، $d_3 = 13.0$ cm و $d_2 = 2.80$ cm نشان می‌دهد؛ نصف قطعه از آلومینیوم (چگالی = 2.70 g/cm^3) و نصف دیگر آن از آهن (چگالی = 7.85 g/cm^3) ساخته شده است. (الف) مختصهٔ x، (ب) مختصهٔ y و (پ) مختصهٔ z مرکز جرم قطعه چقدر است؟



شکل ۹-۴۲ مسئلهٔ ۷

حل: (الف) با توجه به تقارن قطعهٔ مرکب و دستگاه مختصات انتخابی، مشاهده می‌شود که

$$x_{com} = -\frac{d_3}{2} = -\frac{13\text{cm}}{2} = -6.5\text{ cm}$$

(ب) برای به دست آوردن مختصهٔ y مرکز جرم، برای ساده سازی جرم قطعه آهنی را با m_1 و مختصهٔ y مرکز جرم آن و به همین ترتیب برای قطعهٔ آلومینیومی m_2 و y_2 را انتخاب می‌کنیم. حال طبق تعریف مختصهٔ y مرکز جرم قطعهٔ مرکب برابر است با

$$y_{com} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}$$

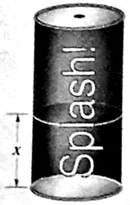
با توجه به اینکه $m_1 = \rho_1 v_1$ و $m_2 = \rho_2 v_2$ و $v_1 = v_2$ ، خواهیم داشت

$$y_{com} = \frac{\rho_1 y_1 + \rho_2 y_2}{\rho_1 + \rho_2}$$
$$= \frac{(7.85\text{ g/cm}^3)(0.5 \times 11\text{cm}) + (2.7\text{g/m}^3)(3 \times 1.5 \times 11\text{cm})}{7.85\text{g/cm}^3 + 2.7\text{g/cm}^3}$$
$$= 8.3\text{ cm}$$

(پ) با توجه به تقارن قطعهٔ مرکب و دستگاه مختصات انتخابی، داریم

$$z_{com} = \frac{d}{2} = \frac{2.8\text{cm}}{2} = 1.4\text{ cm}$$

•••۸- یک قوطی فلزی نوشابه با ترکیب یکنواخت دارای جرم 0.140 kg و ارتفاع 12.0 cm است، (شکل ۹-۴۳). قوطی با 1.31kg نوشابه پر شده است. سپس در بالا و پایین سوراخهایی ایجاد می‌کنیم (جرم کم شدهٔ فلز قابل چشمپوشی است) تا نوشابه خارج شود. ارتفاع h مرکز جرم قوطی و نوشابهٔ آن (الف) در آغاز و (ب) وقتی همهٔ نوشابه خارج شده باشد چقدر است؟ (پ) در حین خارج شدن نوشابه چه تغییری برای h رخ می‌دهد؟ (ت) اگر x ارتفاع نوشابهٔ باقی مانده در هر لحظهٔ معین باشد، x را هنگامی که مرکز جرم به پایینترین نقطهٔ خود می‌رسد، به دست آورید.



شکل ۹-۴۳ مسئلهٔ ۸

حل: (الف) در ابتدا که قوطی نوشابه پر است و جنس قوطی و نوشابه یکنواخت است لذا مرکز جرم مجموعه در $h = H/2$ است. این نتیجه را می‌توان با در نظر گرفتن جرم قوطی و مرکز جرم نوشابه و به کار بردن تعریف مرکز جرم به دست آورد.

(ب) در این حالت فقط قوطی را داریم و مرکز جرم آن روی محور استوانه و در ارتفاع $H/2$ از قاعده قرار دارد.

(پ) در حین خارج شدن نوشابه ارتفاع مرکز جرم کاهش یافته و به یک مقدار کمینه می‌رسد و سپس افزایش یافته و وقتی نوشابه کاملاً تخلیه می‌شود به ارتفاع $H/2$ می‌رسد.

(ت) وقتی سطح نوشابه به اندازهٔ x بالاتر از قاعده قوطی است، جرم نوشابهٔ باقی ماندهٔ m' در قوطی با استفاده از یک تناسب ساده برابر $m' = \frac{m}{H}x$ است. مرکز جرم در این لحظه برابر است با

$$h = \frac{M(H/2) + m'(x/2)}{M + m'} = \frac{M(H/2) + (mx/H)(x/2)}{M + mx/H}$$

$$h = \frac{MH^2 + mx^2}{2(MH + mx)} \qquad (1)$$

برای به دست آوردن x مربوط به کمینه مقدار مرکز جرم قوطی و نوشابه، از h نسبت به x مشتق گرفته و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم

$$\frac{dh}{dx} = \frac{2MmHx + m^2x^2 - MmH^2}{2(MH + mx)} = 0$$

لذا داریم $2MmHx - m^2x^2 - MmH^2 = 0$ و پاسخ این معادله برابر است با

$$x = \frac{-MH \pm \sqrt{M^2H^2 + MmH^2}}{m}$$

با توجه به اینکه x باید مثبت باشد، جواب مثبت را انتخاب می‌کنیم و پس از ساده‌سازی داریم

$$x=\frac{MH}{m}\left[\sqrt{1+\frac{m}{M}}-1\right]$$

با قرار دادن داده‌های مسئله در این رابطهٔ x به دست می‌آید و با جایگزین آن در رابطهٔ (۱)، h به دست می‌آید

●۹- جسمی به جرم $(m=0.50\,\text{kg})$ در مبداء دستگاه مختصات xy و جسم دیگری به جرم $(M=1.5\text{kg})$ در نقطهٔ $(1.0, 2.0)\text{m}$ قرار دارند. در لحظهٔ $t=0$ نیروی $\vec{F}_0=(2.0\hat{i}+3.0\hat{j})N$ به جسم اول و نیروی $F_x=(-3.0\hat{i}, -2.0\hat{j})N$ به جسم دوم اثر می‌کنند. جابه‌جایی مرکز جرم این دستگاه دو جسم بر حسب بردارهای یکه در $t=4.0\text{s}$ نسبت به مکان آن در $t=0$ چقدر است؟

حل: می‌دانیم که جمع برداری نیروهایی که به ذرات دستگاه وارد می‌شود طبق رابطه $\vec{F}_{net}=M\vec{a}_{com}$ به شتاب مرکز جرم مربوط است، لذا می‌توان نوشت

$$\vec{F}_0+\vec{F}_x=(M+m)\vec{a}_{com}$$
$$\Rightarrow(2.0\hat{i}+3.0\hat{j})+(-3.0\hat{i}-2\hat{j})=(1.5\text{kg}+0.5\text{kg})(\vec{a}_{com})$$
$$\Rightarrow\vec{a}_{com}=(-0.5\hat{i}+0.5\hat{j})\ \text{m/s}^2$$

با داشتن بردار شتاب مرکز جرم جسم، می‌توان جابه‌جایی مرکز جرم را به کمک رابطهٔ زیر به دست آورد.

$$\vec{r}_{com}=\frac{1}{2}\vec{a}_{com}t^2+\vec{v}_{0,com}t+\vec{r}_{0,com}$$

که در $t=4\text{s}$ داریم

$$\Delta\vec{r}_{com}=\frac{1}{2}\vec{a}_{com}t^2+\vec{v}_{0,com}t=\frac{1}{2}(-0.5\hat{i}+0.5\hat{j})(4.0)^2+0$$
$$=-4.0\text{m}\hat{i}+4.0\text{m}\hat{j}$$

●۱۰- دو اسکیت باز، یکی به جرم ۶۵kg و دیگری به جرم ۴۰kg، روی سطح یخ زده ایستاده و دو سر تیری به طول ۱۰m با جرم ناچیز را گرفته‌اند. دو اسکیت باز از دو انتهای تیر شروع به کشیدن خودشان در امتداد تیر می‌کنند تا وقتی که به هم برسند. اسکیت باز با جرم ۴۰kg چه فاصله‌ای را پیموده است؟

حل: چون دو اسکیت باز در ابتدا ساکن بوده‌اند و ضمناً هیچ نیروی افقی خارجی به این دو نفر وارد نمی‌شود لذا مکان مرکز آنها ثابت و تغییر نمی‌کند. برای ساده‌سازی مبدإ را در مکان اسکیت‌باز ۶۵kg انتخاب می‌کنیم، لذا داریم

$$x_{com}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=\frac{(65\text{kg})(0)+(40\text{kg})(10\text{m})}{65\text{kg}+40\text{kg}}$$
$$=3.81\text{m}$$

مکانی که دو اسکیت باز به هم می‌رسند همان مکان مرکز جرم است لذا مسافتی که اسکیت باز ۴۰kg طی می‌کند برابر است با

$$10\text{m}-3.81\text{m}=6.19\text{m}$$

●۱۱- سنگی در زمان $t=0$ رها می‌شود. سنگ دیگری با جرم دو برابر اولی، از همان نقطه در $t=100\text{ms}$ رها می‌شود. (الف) مرکز جرم دو سنگ در $t=300\text{ms}$ در چه فاصله‌ای از نقطهٔ رهاشدن قرار دارد؟ (هیچ کدام از سنگها هنوز به زمین نرسیده‌اند). (ب) در این لحظه مرکز جرم دستگاه دو ذره‌ای با چه تندی حرکت می‌کند؟

حل: مکان رها شدن سنگ‌ها را به عنوان مبدإ انتخاب می‌کنیم. مکان سنگ‌ها نسبت به این مبدإ با توجه به زمان رها شدنشان در زمان $t=300\text{ms}$ برابر است:

$$y_1=-\frac{1}{2}gt_1^2=-\frac{1}{2}(9.8\text{m/s}^2)(0.3\text{s})^2=-0.441\text{m}$$
$$y_2=-\frac{1}{2}gt_2^2=-\frac{1}{2}(9.8\text{m/s}^2)(0.3\text{s}-0.1\text{s})^2=-0.196\text{m}$$

در نتیجه مکان مرکز جرم دو سنگ در این لحظه از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$y_{com}=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}$$
$$=\frac{m_1(-0.441\text{m})+2m_1(-0.196\text{m})}{m_1+2m_1}=-0.28\text{m}$$

(ب) تندی سنگ‌ها در این لحظه برابر است

$$v_1=-gt_1=-(9.8\text{m/s}^2)(0.3\text{s})=-2.94\text{m/s}$$
$$v_2=-gt_2=-(9.8\text{m/s}^2)(0.3\text{s}-0.1\text{s})=-1.96\text{m/s}$$

در نتیجه می‌توان نوشت

$$v_{com}=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}=\frac{m_1(-2.94\text{m/s})+2m_1(-1.96\text{m/s})}{m_1+m_2}$$
$$=-2.29\text{m/s}$$

●۱۲- یک اتومبیل ۱۰۰۰kg پشت چراغ قرمز راهنمایی ایستاده است. در لحظه‌ای که چراغ سبز می‌شود، اتومبیل با شتاب ثابت $4.0\,\text{m/s}^2$ شروع به حرکت می‌کند. در همین لحظه یک کامیون ۲۰۰۰kg که با تندی ثابت $8.0\,\text{m/s}$ در حرکت است از اتومبیل پیش می‌افتد. (الف) در لحظهٔ $t=3.0\text{s}$ فاصلهٔ مرکز جرم دستگاه اتومبیل-کامیون از چراغ راهنمایی چقدر است؟ (ب) در آن زمان تندی مرکز جرم اتومبیل-کامیون چقدر است؟

حل: **(الف)** مبدإ مختصات را در محل چراغ راهنمایی در نظر می‌گیریم. برای اتومبیل از معادلات شتاب در $t=3.0\text{s}$ داریم

$$x_1=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}(4.0\text{m/s}^2)(3.0\text{s})^2=18\text{m}$$

و برای مکان کامیون از معادلهٔ سرعت ثابت در همین زمان داریم

$$x_2=vt=(8.0\text{m/s})(3.0\text{s})=24\text{m}$$

در نتیجه مکان مرکز جرم برابر است با

$$x_{com}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=\frac{(1000\text{kg})(18\text{m})+(2000\text{kg})(24\text{m})}{1000\text{kg}+2000\text{kg}}$$
$$=22\text{m}$$

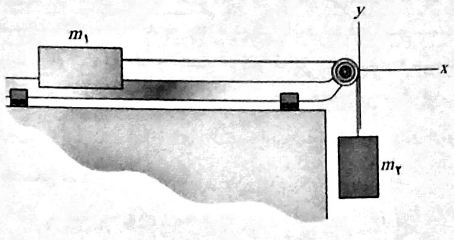
(ب) برای تندی اتومبیل و کامیون داریم

$$v_1=at=(4\text{m/s}^2)(3\text{s})=12\text{m/s}$$
$$v_2=8\text{m/s}$$

در نتیجه تندی مرکز جرم برابر است با

$$v_{com}=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}=\frac{(1000\text{kg})(12\text{m/s})+(2000\text{kg})(8\text{m/s})}{1000\text{kg}+2000\text{kg}}$$
$$=9.3\text{m/s}$$

●●۱۳- شکل ۹-۴۴ آرایشی با یک ریل هوا را نشان می‌دهد که در آن ارابه‌ای به وسیلهٔ ریسمان به قطعهٔ آویزان متصل شده است. ارابه دارای جرم $m_1=0.600\text{kg}$ و مرکز جرم آن در آغاز در مختصات $xy(-0.500\text{m}, 0\text{m})$ واقع است؛ قطعه دارای جرم $m_2=0.400\text{kg}$ و مرکز جرم آن در آغاز در مختصات $xy(0, -0.100\text{m})$ قرار دارد. جرم ریسمان و قرقره قابل چشمپوشی است. ارابه را از حالت سکون رها می‌کنیم. ارابه و قطعه حرکت می‌کنند تا وقتی که ارابه به قرقره برخورد کند. اصطکاک بین ارابه و ریل هوا و بین قرقره و محورش قابل چشمپوشی است. (الف) شتاب مرکز جرم دستگاه ارابه- قطعه برحسب بردارهای یکه چیست؟ (ب) سرعت مرکز جرم برحسب تابعی از زمان چگونه است؟ (پ) مسیری را که توسط مرکز جرم طی می‌شود رسم کنید. (ت) اگر مسیر منحنی باشد، آیا برآمدگیها به سمت بالا و به طرف راست است یا به سمت پایین و به طرف چپ و اگر مسیر خط راست باشد، زاویهٔ آن را با محور x به دست آورید.



شکل ۹-۴۴ مسئلهٔ ۱۳

حل: **(الف)** نیرویی که موجب حرکت دستگاه (دو جسم m_2 و m_1) می‌شود برابر m_2g است لذا شتاب دستگاه یا در واقع شتاب هر جسم برابر است با

$$m_2g=(m_1+m_2)a\Rightarrow a=\frac{m_2}{m_1+m_2}g=3.92\text{m/s}^2$$

لذا با توجه به جهت حرکت ارابه و قطعه بردار شتاب آنها برابر است با

$$\vec{a}_1=3.92\hat{i}\qquad\text{و}\qquad\vec{a}_2=-3.92\hat{j}$$

و بردار شتاب مرکز جرم عبارت است از

$$\vec{a}_{com}=\frac{m_1\vec{a}_1+m_2\vec{a}_2}{m_1+m_2}=\frac{(0.6)(3.92\hat{i})+(0.4)(-3.92\hat{j})}{0.6+0.4}$$
$$=(2.35\hat{i}-1.57\hat{j})\,\text{m/s}^2$$

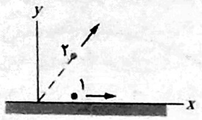
(ب) با توجه به رابطهٔ $\vec{v}_{com}=\int_0^t\vec{a}_{com}dt$ می‌توان نوشت

$$\vec{v}_{com}=(2.35\hat{i}-1.57\hat{j})t\ \text{m/s}$$

(پ) و (ت) با توجه به اینکه نسبت مؤلفه‌های $\vec{v}_{com}$ نسبت به زمان از درجهٔ اول هستند، لذا مسیر یک خط راست خواهد بود و شیب آن با توجه به زاویهٔ زیر مشخص می‌شود

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{-1.57}{2.35}\right)=-33.7^\circ$$

●●۱۴- در شکل ۹-۴۵ دو ذره در زمان $t=0$ از مبداء دستگاه مختصات پرتاب می‌شوند. ذرهٔ ۱ با جرم $m_1=5.00\text{g}$ مستقیماً در امتداد محور x شلیک می‌شود (روی یک کف بدون اصطکاک)، و با تندی ثابت 10.0m/s حرکت می‌کند. ذرهٔ ۲ با جرم $m_2=3.00\text{g}$ با سرعتی به بزرگی 20.0m/s با زاویه‌ای به سمت بالا شلیک می‌شود به طوری که همیشه در حین پرواز مستقیماً بالای ذرهٔ ۱ قرار دارد. (الف) مرکز جرم دستگاه دو-ذره تا چه ارتفاع بیشینهٔ H_{max} بالا می‌رود؟ وقتی مرکز جرم به H_{max} می‌رسد، بر حسب بردارهای یکه، (ب) سرعت و (پ) شتاب مرکز جرم چیست؟



شکل ۹-۴۵ مسئلهٔ ۱۴

حل: **(الف)** با توجه به اینکه ذرهٔ ۲ همواره بالای ذرهٔ ۱ قرار دارد در نتیجه مؤلفهٔ سرعت آن با سرعت ذرهٔ ۱ یکسان است، یعنی داریم

$$v_{2x}=v_1=10\text{m/s}$$

با توجه به بزرگی سرعت ذرهٔ ۲، $v_2=20\text{m/s}$ ، می‌توان مؤلفهٔ y ذرهٔ ۲ را به دست آورد

$$v_{2y}=\sqrt{v_2^2-v_{2x}^2}=\sqrt{(20)^2-(10)^2}=\sqrt{300}\text{m/s}$$

با توجه به پایستگی انرژی، ارتفاع بیشینهٔ ذرهٔ ۲ را می‌توان به دست آورد

$$y_{2,max}=\frac{v_{2y}^2}{2g}=\frac{300}{2(9.8)}=15.3\text{m}$$

حال بیشینهٔ مرکز جرم دو ذره را می‌توان به دست آورد

$$H_{com,max}=\frac{m_1(0)+m_2(y_{2,max})}{m_1+m_2}=\frac{(3.00\text{g})(15.3m)}{5.00\text{g}+3.00\text{g}}$$
$$=5.74\text{m}$$

(ب) وقتی ذرهٔ ۲ به اوج می‌رسد، $v_{2y}=0$ و $v_{2x}=v_2$ که برابر v_1 است.

لذا سرعت مرکز جرم در نقطهٔ اوج برابر است با

$$\vec{v}_{com}=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$
$$=\frac{(5.00\text{g})(10.0\text{m/s})\hat{i}+(3.00\text{g})(10.0\text{m/s})\hat{i}}{5.00\text{g}+3.00\text{g}}$$
$$=10.0\text{m/s}\hat{i}$$

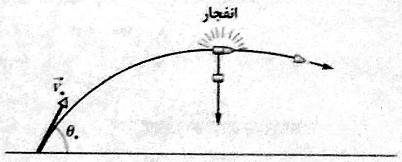
البته چون دو ذره دارای سرعت افقی یکسان هستند، نتیجه به دست آمده قابل انتظار بود.

(پ) توجه داریم که ذرهٔ ۱ دارای سرعت ثابت یعنی شتاب صفر است و ذرهٔ ۲ تحت شتاب $\vec{g}$ قرار دارد، لذا شتاب مرکز جرم در نقطهٔ اوج از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$\vec{a}_{com} = \frac{m_۱\vec{a}_۱ + m_۲\vec{a}_۲}{m_۱ + m_۲}$$

$$= \frac{(۵/۰۰g)(۰) + (۳/۰۰g)(-۹/۸m/s^۲\hat{j})}{۵/۰۰g + ۳/۰۰g} = -۳/۶۸m/s^۲\hat{j}$$

●●۱۵- گلوله‌ای با سرعت اولیهٔ $\vec{v}_۰$ برابر $۲۰ m/s$ با زاویهٔ $\theta_۰ = ۶۰°$ نسبت به افق شلیک می‌شود. در بالای مسیر گلوله منفجر و به دو تکه با جرمهای مساوی تقسیم می‌شود (شکل ۹-۴۶). یک تکه که تندی آن درست پس از انفجار صفر است به طور قائم سقوط می‌کند. تکهٔ دیگر در چه فاصله‌ای از توپ به زمین فرود می‌آید، با فرض اینکه زمین با تفنگ هم سطح است و از نیروی کششی هوا می‌توان چشمپوشی کرد. SSM



شکل ۹-۴۶ مسئلهٔ ۱۵

حل: نیروی انفجار یک نیروی داخلی است و روی مسیر مرکز جرم اثری ندارد لذا مرکز جرم به حرکت پرتابه‌ای خود ادامه داده و مکان مرکز جرم در موقع برخورد با زمین عملاً همان برد پرتابه است. لذا می‌توان نوشت

$$x_{com} = R = \frac{v_۰^۲ \sin ۲\theta_۰}{g} = \frac{(۲۰/۰ m/s)^۲ \sin(۱۲۰°)}{۹/۸m/s^۲} = ۳۵/۳۴m$$

چون انفجار در اوج حرکت رخ داده و قطعهٔ ۱ به صورت قائم سقوط می‌کند پس مکان برخورد به زمین آن برابر است با $x_۱ = R/۲$ و محل برخورد قطعهٔ ۲ را $x_۲$ بنامیم می‌توان آن را از رابطه تعریف مرکز جرم به دست آورد.

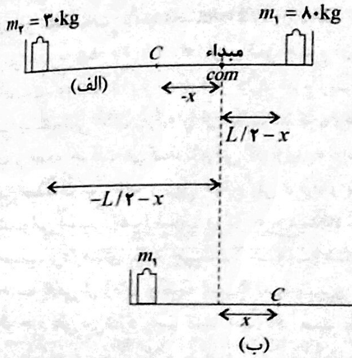
$$x_{com} = \frac{m_۱x_۱ + m_۲x_۲}{m_۱ + m_۲} \Rightarrow R = \frac{m_۱(R/۲) + m_۲x_۲}{m_۱ + m_۲}$$

چون $m_۲ = m_۱$ است لذا داریم

$$\Rightarrow x_۲ = \frac{۳}{۲}R = \frac{۳}{۲}(۳۵/۳۴ m) = ۵۳ m$$

●●●۱۶- شخصی به جرم $۸۰kg$ با شخص دیگری که سبکتر است با یک قایق پارویی به جرم $۳۰kg$ در دریاچه‌ای به قایقرانی مشغول‌اند. وقتی قایق در آب آرام ساکن است، آنها صندلیهای خود را که $۳/۰ m$ فاصله دارند و نسبت به مرکز قایق تقارن دارند عوض می‌کنند. شخص سنگینتر متوجه می‌شود که در حین عوض کردن جا قایق نسبت به کندهٔ درختی که داخل آب است به اندازهٔ $۴۰ cm$ به طور افقی حرکت می‌کند و از آنجا جرم شخص دیگر را که به او گفته نشده است محاسبه می‌کند، این جرم چقدر است؟

حل: چون نیروی افقی صفر است لذا شتاب نیز صفر و سرعت مرکز جرم ثابت است و چون قایق در آغاز ساکن است مرکز جرم نیز باید ساکن بماند. مرکز جرم به شخص $m_۱ = ۸۰kg$ نزدیکتر است و برای سادگی مبدأ را در مکان مرکز جرم انتخاب می‌کنیم یعنی $x_{com} = ۰$ و با توجه به شکل الف و جرم قایق برابر با $m_۳$ ، داریم



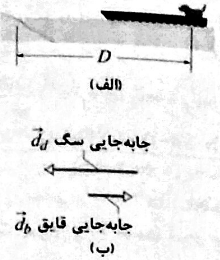
$$m_۱\left(\frac{L}{۲} - x\right) + m_۲\left(-\frac{L}{۲} - x\right) + m_۳(-x) = ۰$$

پس از اینکه این دو نفر جای خود را عوض می‌کنند مرکز جرم ضمن ساکن بودن باید به $m_۱$ نزدیکتر باشد لذا قایق به سمت راست حرکت می‌کند و اینبار مرکز قایق به مقدار x سمت راست مبدا قرار می‌گیرد (شکل ب) یعنی جابه‌جایی مرکز قایق برابر $۲x$ است لذا $x = \frac{۴۰}{۲} = ۲۰cm$ و با قرار دادن آن و داده‌های مسئله در رابطهٔ بالا و حل آن برای $m_۲$ ، داریم

$$m_۲ = \frac{m_۱\left(\frac{L}{۲} - x\right) - m_۳x}{\frac{L}{۲} + x} = \frac{(۸۰)\left(\frac{۳۰}{۲} - ۰/۲\right) - (۳۰)(۰/۲)}{\frac{۳۰}{۲} + ۰/۲}$$

$$= ۵۷/۶kg$$

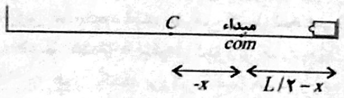
●●●۱۷- در شکل ۹-۴۷ الف، سگی به جرم $۴/۵kg$ روی قایق $۱۸kg$ ایستاده است و در فاصلهٔ $D = ۶/۱m$ از ساحل قرار دارد. سگ $۲/۴m$ روی قایق به سمت ساحل راه می‌رود و سپس می‌ایستد. فرض کنید بین آب و قایق اصطکاک وجود ندارد. سگ در این لحظه در چه فاصله‌ای از ساحل قرار دارد؟ (راهنمایی: به شکل ۹-۴۷ ب نگاه کنید. سگ به سمت چپ حرکت می‌کند؛ قایق به سمت راست می‌رود؛ آیا مرکز جرم سگ + قایق حرکت خواهد کرد؟)



شکل ۹-۴۷ مسئلهٔ ۱۷

حل: جرم سگ را $m_۱$ و جرم قایق را $m_۲$ می‌نامیم. مرکز جرم دستگاه به سگ نزدیکتر است. برای سادگی کار مبدأ را در مکان مرکز جرم که ساکن باقی می‌ماند (چون نیروی افقی برابر صفر است و قایق در ابتدا نیز ساکن است) انتخاب می‌کنیم، در نتیجه $x_{com} = ۰$ و با توجه به شکل می‌توان نوشت

$$m_۱\left(\frac{L}{۲} - x\right) + m_۲(-x) = ۰$$



با قرار دادن داده‌های مسئله و حل معادله برای x ، داریم

$$(۴/۵)\left(\frac{۲/۴}{۲} - x\right) + ۱۸(-x) = ۰ \Rightarrow x = ۰/۲۴m$$

پس از جابه‌جایی سگ $(d_d = ۲/۴m)$ مرکز جرم هنوز هم باید نزدیک به سگ باشد لذا قایق باید به سمت راست حرکت کند و مرکز قایق به اندازه $d_b = ۲x = ۰/۴۸m$ به سمت راست جابه‌جا می‌شود در نتیجه می‌توان مکان جدید سگ را از ساحل از رابطهٔ زیر به دست آورد.

$$x_d = D + d_b - d_d = ۶/۱m - ۰/۴۸m - ۲/۴m$$
$$= ۴/۱۸m$$

●۱۸- توپی به جرم $۰/۷۰kg$ که به طور افقی حرکت می‌کند در هنگام برخورد با یک دیوار عمودی دارای تندی $۵/۰ m/s$ است. توپ با تندی $۲/۰ m/s$ به عقب برمی‌گردد. بزرگی تغییر اندازه حرکت خطی توپ چقدر است؟

حل: جهت برگشت توپ را مثبت فرض می‌کنیم. تغییر اندازه حرکت برابر است با

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = mv_f\hat{i} - mv_i(-\hat{i}) = m(v_f + v_i)\hat{i}$$

و بزرگی تغییر اندازه حرکت برابر است

$$\Delta P = m(v_f + v_i) = (۰/۷۰kg)(۲/۰ m/s + ۵/۰ m/s)$$
$$= ۴/۹kg \cdot m/s$$

●۱۹- کامیونی به جرم $۲۱۰۰kg$ که با تندی $۴۱km/h$ به سمت شمال در حال حرکت است، به سمت شرق می‌پیچد و با تندی $۵۱km/h$ شتاب می‌گیرد. (الف) تغییر در انرژی جنبشی کامیون چقدر است؟ (ب) بزرگی و جهت تغییر در اندازه حرکت خطی کامیون چقدر است؟ ILW

حل:

$$v_i = ۴۱km/h = ۱۱/۳۹ m/s \quad و \quad v_f = ۵۱km/h = ۱۴/۱۷m/s$$

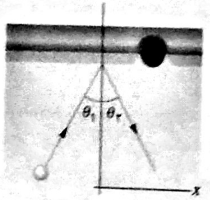
(الف)

$$\Delta k = \frac{۱}{۲}mv_f^۲ - \frac{۱}{۲}mv_i^۲$$
$$= \frac{۱}{۲}(۲۱۰۰kg)(۱۴/۱۷m/s)^۲ - \frac{۱}{۲}(۲۱۰۰kg)(۱۱/۳۹m/s)^۲$$
$$= ۷۴۶۱۰J$$

(ب)

$$\vec{P}_f = m\vec{v}_f = (۲۱۰۰kg)(۱۴/۱۷m/s)\hat{j} = ۲۹۷۵۷\hat{j}\ kg \cdot m/s$$
$$\vec{P}_i = m\vec{v}_i = (۲۱۰۰kg)(۱۱/۳۹m/s)\hat{i} = ۲۳۹۱۹\hat{i}\ kg \cdot m/s$$
$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = ۲۹۷۵۷\hat{j} - ۲۳۹۱۹\hat{i}\ kg \cdot m/s$$
$$\Delta P = \sqrt{(۲۹۷۵۷)^۲ + (-۲۳۹۱۹)^۲} = ۳۸۱۷۹kg \cdot m/s$$
$$\theta = \tan^{-۱}\frac{-۲۳۹۱۹}{۲۹۷۵۷} = -۳۸/۸°$$

●●۲۰- شکل ۹-۴۸ دید از بالای مسیر طی شده به وسیلهٔ یک گوی بیلیارد به جرم $۰/۱۶۵kg$ را نشان می‌دهد که پس از برخورد به لبهٔ میز به عقب می‌جهد. تندی اولیهٔ گوی $۲/۰۰m/s$ و زاویهٔ $\theta_۱$ برابر $۳۰°$ است. به عقب جهیدن مؤلفهٔ y را بر عکس می‌کند اما مؤلفهٔ x تغییر نمی‌کند. (الف) زاویهٔ $\theta_۲$ ، (ب) تغییر در اندازه حرکت خطی گوی برحسب نمادگذاری بردار یکه چگونه است؟ (این واقعیت که گوی می‌غلتد در مسئله منظور نشده است.)



شکل ۹-۴۸ مسئلهٔ ۲۰

حل: (الف) اگر توپ و تیر را یک سیستم در نظر بگیریم، با توجه به پایستگی اندازه حرکت خطی داریم $\vec{P}_f = \vec{P}_i$ و با توجه به شکل مسئله برای توپ می‌توان نوشت $P_{xf} = P_{xi}$ و $P_{yf} = -P_{yi}$ ، از طرف دیگر چون مؤلفهٔ x سرعت یکسان باقی می‌ماند لذا می‌توان نوشت

$$P_{xf} = P_{xi} \Rightarrow mv_i \sin\theta_۲ = mv_i \sin\theta_۱ \Rightarrow \theta_۲ = \theta_۱ = ۳۰°$$

(ب)

$$\Delta\vec{P} = (P_{xf} - P_{xi})\hat{i} + (-P_{yf} - P_{yi})\hat{j}$$
$$= -۲P_{yi}\hat{j} = -۲mv_i \cos\theta_۱\hat{j}$$
$$= -(۰/۵۷۲kg \cdot m/s)\hat{j}$$

●●۲۱- یک توپ بیسبال به جرم $۰/۳۰ kg$ درست پیش از برخورد با چوب بیسبال، با زاویهٔ $۳۵°$ زیر خط افق دارای سرعت $۱۵m/s$ است. بزرگی تغییر اندازه حرکت توپ در حین برخورد چقدر است، در صورتی که توپ، چوب بیسبال را با سرعت (الف) $۲۰ m/s$ ، قائم به سمت پایین، و $۲۰ m/s$ ، افقی و به سمت عقب به سمت زنندهٔ توپ، ترک کند؟

حل: (الف)

$$P_i = mv_i\cos\theta\,\hat{i} + mv_i\sin\theta(-\hat{j})$$
$$= (0/3)(15)(\cos 35°)\hat{i} - (0/3)(15)(\sin 15)\hat{j}$$
$$= 3/68\hat{i} - 2/58\hat{j}\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$

و

$$P_f = mv_f(-\hat{j}) = -(0/3)(20)\hat{j} = -6\hat{j}\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$

لذا $\Delta\vec{P}$ برابر است با

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = -3/68\hat{i} + (-6+2/58)\hat{j}\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$
$$= -3/68\hat{i} - 3/42\hat{j}\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$

و بزرگی تغییر اندازه حرکت خطی برابر است با

$$\Delta P = \sqrt{(-3/68)^2 + (-3/42)^2}$$
$$= 5\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$

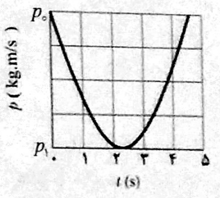
(ب) در این حالت $\vec{P}_f = -6\hat{i}\ \mathrm{kg\cdot m/s}$ لذا خواهیم داشت

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = (-6\hat{i}) - (3/68\hat{i} - 2/58\hat{j})$$
$$= -9/68\hat{i} + 2/58\hat{j}\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$

و

$$\Delta P = \sqrt{(-9/68)^2 + (2/58)^2} = 10\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$

۲۲••- در زمان $t = 0$، توپی به سطح زمین برخورد می کند و به سطحی بالای زمین می‌رود. شکل ۹-۴۹ بزرگی p اندازه حرکت توپ را برحسب t در حین پرواز به دست می‌دهد $(p_1 = 4/0\ \mathrm{kg\cdot m/s}, p_0 = 6/0\ \mathrm{kg\cdot m/s})$. با چه زاویهٔ اولیه‌ای توپ پرتاب شده است؟



شکل ۹-۴۹ مسئلهٔ ۲۲

حل: با توجه به نمودار، در لحظهٔ پرتاب بزرگی اندازه حرکت خطی برابر است با $P_0 = 6\mathrm{kg\cdot m/s}$. از طرفی مؤلفهٔ افقی اندازه حرکت در طول مسیر ثابت است در نتیجه برای نقطه اوج داریم $P_{0x} = P_x = 4\mathrm{kg\cdot m/s}$ لذا خواهیم داشت

$$P_{0y} = \sqrt{P_0^2 - P_{0x}^2} = \sqrt{(6)^2 + (4)^2} = 4/47\mathrm{kg\cdot m/s}$$
$$\theta_0 = \tan^{-1}\frac{P_{0y}}{P_{0x}} = \tan^{-1}\left(\frac{4/47}{4}\right) = 48/2°$$

۲۳•- نیرویی در جهت منفی محور x در مدت ۲۷ms به توپی به جرم ۰/۴۰ kg که در آغاز با تندی ۱۴m/s در جهت مثبت محور حرکت می‌کند، وارد می‌شود. بزرگی نیرو تغییر می‌کند، و ضربه دارای بزرگی ۳۲/۴N·s است. (الف) تندی و (ب) جهت حرکت توپ درست پس از واردشدن نیرو، چیست؟ (پ) بزرگی متوسط نیرو و (ت) جهت ضربه روی توپ را معین کنید. **SSM**

حل: جهت ضربه در جهت نیرو است (با توجه به معادلهٔ ۹-۳۰) یعنی در جهت منفی محور x. از معادلهٔ ۹-۳۱ داریم

$$\vec{J} = \Delta\vec{P} \Rightarrow \vec{J} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i \Rightarrow \vec{v}_f = \frac{\vec{J} + m\vec{v}_i}{m}$$
$$\Rightarrow \vec{v}_f = \frac{(32/4\ \mathrm{N\cdot s})(-\hat{i}) + (0/40\ \mathrm{kg})(14\ \mathrm{m/s})(\hat{i})}{(0/40\ \mathrm{kg})}$$
$$= -(67\ \mathrm{m/s})\hat{i}$$

(الف) تندی درست پس از وارد شدن نیرو براب راست با ۶۷m/s .

(ب) جهت سرعت در جهت منفی محور x است.

(پ) از معادله ۹-۳۰ داریم

$$F_{ave} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{32/4\ \mathrm{N\cdot s}}{2/70\times10^{-2}\ \mathrm{s}} = 1200\ \mathrm{N}$$

(ت) جهت ضربه در جهت نیرو و در جهت منفی محور x است.

۲۴•- یک شوخی خطرناک این است که وقتی شخصی می‌خواهد روی صندلی بنشیند صندلی را از زیر او بکشند و او محکم به روی کف فرود آید. فرض کنید شخصی با جرم ۷۰kg به فاصلهٔ ۰/۵۰m سقوط کند و برخورد او با کف به مدت ۰/۰۸۲s طول بکشد. بزرگی (الف) ضربه و (ب) نیروی میانگینی که در طی برخورد از طرف کف به شخص وارد می‌شود چقدر است؟

حل: (الف)

$$v^2 - v_0^2 = 2gh \qquad v = \sqrt{2gh}$$
$$v = \sqrt{(2)(9/8)(0/5)} = 3/13\ \mathrm{m/s}$$
$$J = \Delta P = mv - 0 = (70)(3/13) = 219\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$

(ب)

$$\overline{F} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{219}{0/082} = 2672\ \mathrm{N}$$

۲۵•- هنری لاموته تا هفتاد سالگی تماشاچیان را با پرش از ارتفاع ۱۲m به داخل آب با عمق ۳۰ cm که با شکم به آب برمی‌خورد هیجان زده می‌کرد، (شکل ۹-۵۰). فرض کنید او درست وقتی که به ته آب می‌رسد متوقف می‌شود. جرم او را حساب کنید و بزرگی ضربه‌ای را که از طرف آب به او وارد می‌شود به دست آورید.

شکل ۹-۵۰ مسئلهٔ ۲۵ پرش با شکم به داخل ۳۰ cm از آب

حل: تندی شخص درست پیش از برخورد به سطح آب را می‌توان از پایستگی انرژی به دست آورد

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$
$$v = \sqrt{2(9/8)(12)} = 15/34\ \mathrm{m/s}$$

شخص پس از برخورد به سطح آب در آب فرورفته و سرعت آن پس از طی مسافت $d = 0/3\mathrm{m}$ به حالت سکون در می‌آید که در واقع شتاب بازدارنده بالایی را تحمل می‌کند که میتوان از رابطه زیر به دست آورد.

$$0 - v^2 = -2ad \Rightarrow a = \frac{v^2}{2d} = \frac{(15/34)^2}{2(0/3)} = 392\mathrm{m/s^2}$$

که برحسب g عبارت است از

$$a = 40g$$

نیروی بازدارنده را نیز می‌توان از رابطه زیر به دست آورد

$$F - mg = ma \Rightarrow F = m(g+a) = m(g+40g)$$
$$F = 41mg$$

با آنکه این نیروی بسیار زیادی است ولی چون مدت زمان آن کوتاه است لذا شخص جان سالم به در می‌برد.)

زمان توقف شخص پس از برخورد با سطح آب کوتاه است لذا می‌توان با تقریب ضربهٔ وارد بر او را از رابطهٔ زیر به دست آورد

$$J = \Delta P = 0 - mv$$

جرم شخص را با توجه به ویرایش‌های قبلی ۷۰kg در نظر بگیریم و جهت سرعت رو به پایین لذا منفی است در نتیجه داریم

$$J = -(70\ \mathrm{kg})(-15/34) = 1074\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$

۲۶•- در سال ۱۹۵۵/۱۳۳۴، چتربازی، از ارتفاع ۳۷۰m از هواپیما می‌پرد و بعد چون نمی‌تواند چتر خود را باز کند به زمینی که اتفاقاً پوشیده از برف است برمی‌خورد، و فقط کمی جراحت برمی‌دارد. فرض کنید که تندی او موقع برخورد ۵۶m/s (سرعت حد)، جرمش (با وسایل) ۸۵kg و نیرویی که توسط برف به او وارد شده، در حد زنده ماندن یعنی $1/2\times10^5$ N بوده است. (الف) کمترین ضخامت برف باید چقدر باشد تا او با ایمنی متوقف شود؟ (ب) بزرگی ضربه‌ای که از برف به او وارد می‌شود چقدر است؟

حل: (الف) نیروی وارد بر چترباز را در این برخورد می‌توان نیروی میانگین وارد بر او در نظر گرفت و تغییر اندازه حرکت خطی آن نیز برابر است با $\Delta P = P_f - P_i = 0 - P_i$ ، لذا از معادله ۹-۳۰ می‌توان نوشت

$$\Delta t = \left|\frac{\Delta P}{F_{ave}}\right| = \frac{85(56)}{1/2\times10^5} = 3/96\times10^{-2}\ \mathrm{s}$$

در نتیجه می‌توان ضخامت برف را از رابطه زیر به دست آورد

$$h = \left(\frac{v_f + v_i}{2}\right)\Delta t = \left(\frac{0 + 56\ \mathrm{m/s}}{2}\right)(3/96\times10^{-2}\ \mathrm{s}) = 1/1\mathrm{m}$$

(ب) از معادله ۹-۳۱ داریم

$$\vec{J} = \Delta\vec{P} \Rightarrow J = |P_f - P_i| = |0 - (85\ \mathrm{kg})(56\ \mathrm{m/s})|$$
$$J = 4760\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$

۲۷•- توپی به جرم ۱/۲kg به طور قائم به روی کف اتاقی رها می‌شود و با تندی ۲۵m/s به آن برخورد می‌کند. توپ با تندی اولیهٔ ۱۰ m/s به سمت بالا برمی‌گردد. (الف) در حین این تماس چه ضربه‌ای به توپ وارد شده است؟ (ب) اگر توپ به مدت ۰/۲۰ s با کف در تماس باشد، نیروی میانگینی که به کف اتاق وارد می‌کند چقدر است؟

حل: (الف) از معادلهٔ ۹-۳۱ داریم

$$\vec{J} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = (1/2\mathrm{kg})(10\ \mathrm{m/s}\ \hat{j}) - (1/2\mathrm{kg})(-25\ \mathrm{m/s}\ \hat{j})$$
$$= 42\hat{j}\mathrm{kg\cdot m/s}$$

(ب) از معادله ۹-۳۵ می‌توان نوشت

$$\vec{F}_{ave} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{42\hat{j}}{0/02} = 2100\mathrm{N}\hat{j}$$

۲۸•- در یک بازی ورزشی دست شما با تندی ۱۳m/s روی هدفی فرود می‌آید و در طی زمان برخورد ۵/۰ ms متوقف می‌شود. فرض کنید در طی برخورد، دست مستقل از بازو و دارای جرم ۰/۷۰ kg است. بزرگی (الف) ضربه و (ب) نیروی میانگینی که از طرف هدف به دست وارد می‌شود چقدر است؟

حل: (الف)

$$J = \Delta P = m\Delta v = (0/7)(13) = 9/1\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$

(ب)

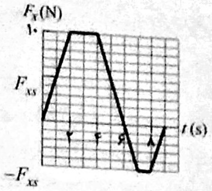
$$\overline{F} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{9/1}{5\times10^{-3}} = 1820\ \mathrm{N}$$

۲۹•- مشهور است که گلوله‌ها و دیگر پرتابه‌ها که به طرف سینهٔ قهرمان افسانه‌ای موسوم به سوپرمن شلیک شوند به سادگی از سینه او وامی‌جهند. فرض کنید که سارقی به سینهٔ این سوپرمن گلوله‌هایی به جرم ۳g با آهنگ ۱۰۰ گلوله / min، که تندی هر گلوله ۵۰۰m/s است، شلیک می‌کند. همچنین فرض کنید گلوله‌ها بدون تغییر در تندی آنها مستقیم به عقب برمی‌گردند. نیروی میانگین وارد شده توسط جریان گلوله‌ها به سینهٔ سوپرمن چقدر است؟

حل: چون تندی گلوله‌ها پس از برخورد تغییر نمی‌کند لذا تغییر اندازه حرکت خطی هر گلوله برابر $\Delta P = 2mv$ است و برای N گلوله داریم $\Delta P_{کل} = 2Nmv$ در نتیجه خواهیم داشت

$$F_{ave} = \frac{\Delta P_{کل}}{\Delta t} = \frac{2Nmv}{\Delta t} = \frac{2(100)(3\times10^{-3}\ \mathrm{kg})(500\mathrm{m/s})}{60\mathrm{s}}$$
$$= 5\mathrm{N}$$

۳۰••- یک اتومبیل اسباب بازی به جرم ۵/۰ kg می‌تواند در امتداد محور x حرکت کند. شکل ۹-۵۱، F_x نیروی وارد بر اتومبیل را نشان می‌دهد که از حالت سکون در $t = 0$ شروع می‌شود. مقیاس محور F_x با $F_{xs} = 5/0\ \mathrm{N}$ مشخص شده است. در نماد بردار- یکه، $\vec{p}$ در (الف) $t = 4/0\mathrm{s}$ و (ب) $t = 7/0\mathrm{s}$ چقدر است؟ (پ) در $t = 9/0\mathrm{s}$ ، $\vec{v}$ چقدر است؟



شکل ۹-۵۱ مسئلهٔ ۳۰

حل: سطح زیر منحنی نیرو- زمان تغییر اندازه حرکت خطی را به دست می‌دهد. به ازای $t=0$ ، $P(0)=0$ و (الف) به ازای $0<t<4s$ ، سطح از یک مثلث و یک مستطیل تشکیل شده است. لذا

$$P(4)-P(0)=\frac{1}{2}(2s)(10\,N)+(2s)(10\,N)=30\,N\cdot s$$

$$\vec P(4)=30\,N\cdot s\,\hat i$$

(ب) به ازای $0<t<7s$ ، سطح از یک ذوزنقه و یک مثلث تشکیل شده است. لذا

$$P(7)-P(0)=\frac{1}{2}(2s+6s)(10\,N)+\frac{1}{2}(1s)(-5\,N)-0$$
$$=37/5\,N\cdot s$$

$$\vec P(7)=(37/5\,N\cdot s)\hat i$$

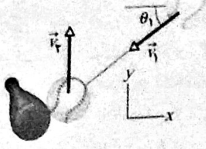
(پ) به ازای $0<t<9s$ ، سطح از دو ذوزنقه تشکیل شده است. لذا

$$P(9)-P(0)=\frac{1}{2}(2s+6s)(10\,N)+\frac{1}{2}(1s+3s)(-5N)$$
$$=30\,N\cdot s$$

$$\vec P(9)=(30\,N\cdot s)\hat i$$

$$\vec P=m\vec v\Rightarrow\vec v=\frac{\vec P}{m}=\frac{(30\,N\cdot s)\hat i}{5kg}=(6m/s)\hat i$$

۳۱●●- شکل ۹-۵۲ یک توپ بیسبال به جرم $0/300kg$ را درست پیش و پس از برخورد با چوب بیسبال نشان می‌دهد. درست پیش از برخورد توپ دارای سرعت $\vec v_1$ به بزرگی $12/0m/s$ و زاویهٔ $\theta_1=35°$ است. درست پس از برخورد، توپ مستقیماً به سمت بالا با سرعت $\vec v_2$ به بزرگی $10/0\,m/s$ حرکت می‌کند. مدت برخورد $2/00ms$ است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت محور x) ضربهٔ وارد به توپ از طرف چوب بیسبال چقدر است؟ (پ) بزرگی و (ت) جهت نیروی متوسط وارد به توپ از طرف چوب بیسبال چیست؟ GO



شکل ۹-۵۲ مسئلهٔ ۳۱

حل:

$$\vec J=\Delta\vec P=\vec P_f-\vec P_i=mv_f\,\hat j-[mv_i\cos\theta(-\hat i)+mv_i\sin\theta(-\hat i)]$$
$$=(2/95\hat i+5/1\hat j)N\cdot s$$

(الف) $J=\sqrt{(2/95)^2+(5/1)^2}=5/86\,N\cdot s$

(ب) $\theta=\tan^{-1}\frac{J_y}{J_x}=\tan^{-1}\frac{5/1}{2/95}=60°$

(پ) $F_{ave}=\frac{J}{\Delta t}=\frac{5/86}{2\times10^{-3}}=2/93\times10^3\,N$

(ت) جهت نیرو ضربه یکسان است، $\theta=60°$.

۳۲●●- نوعی مارمولک می‌تواند روی سطح آب بدود (شکل ۹-۵۳). با هر قدم، مارمولک ابتدا پایش را به آب می‌کوبد و سپس آن را به پایین و داخل آب فشار می‌دهد، این کار را به قدر کافی سریع انجام می‌دهد تا حفره‌ای از هوا در نوک پایش ایجاد شود. مارمولک برای آنکه بتواند در مقابله با نیروی مقاومت آب پایش را بالا بکشد تا گام را کامل کند، آن را پیش از پرشدن آب در حفرهٔ هوا بلند می‌کند. برای آنکه مارمولک فرو نرود باید در حین کوبیدن پا، فشاردادن پا به طرف پایین و بلند کردن آن، ضربهٔ رو به بالای وارد بر مارمولک با ضربهٔ رو به پایین بر اثر نیروی گرانش سازگار باشند. فرض کنید جرم مارمولک $90/0g$، جرم هر پا $3/0g$، تندی پا موقع کوبیدن به آب $1/5m/s$ و مدت زمان هر قدم تنها $0/600s$ باشد. (الف) بزرگی ضربهٔ وارد بر مارمولک موقع کوبیدن پا چقدر است؟ (فرض کنید این ضربه مستقیماً به سمت بالا است.) (ب) در مدت زمان $0/600s$ برای هر قدم، ضربهٔ رو به پایین وارد بر مارمولک از طرف نیروی گرانشی چقدر است؟ (پ) کدام عمل، کوبیدن پا یا فشار دادن آن، تکیه گاه اصلی مارمولک را ایجاد می‌کند یا آنها تقریباً نقش یکسانی دارند؟

شکل ۹-۵۳ مسئلهٔ ۳۲ مارمولکی که روی سطح آب می‌دود.

حل: ضربهٔ وارد به پای مارمولک را در راستای محور y در نظر می‌گیریم. از معادله ۹-۳۱ داریم

$$\vec J=\vec P_f-\vec P_i=0-mv(-\hat j)$$

در اینجا m جرم یک پای مارمولک و v تندی پای مارمولک است، که قائم و رو به پایین است و $\vec J$ ضربهٔ ناشی از نیروی وارد به پای مارمولک است.

$$\vec J=mv\hat j=(3/0\times10^{-3}\,kg)(1/5\,m/s)\hat j$$
$$=4/5\times10^{-3}\,N\cdot s\,\hat j$$

همانگونه که انتظار می‌رفت، رو به بالاست و بزرگی آن برابر است با

$$J=4/5\times10^{-3}\,N\cdot s$$

(ب) در اینجا نیروی میانگین همان نیروی گرانش است که به کل جرم مارمولک یعنی M وارد می‌شود

$$\vec J=\vec F_{ave}\Delta t=Mg(-\hat j)\Delta t$$
$$=(90/0\times10^{-3}\,kg)(9/8\,m/s^2)(0/6s)(-\hat j)$$
$$=-(0/529\,N\cdot s)\hat j$$

(پ) با مقایسه قسمت (الف) و (ب) می‌بینیم ضربهٔ رو به بالای وارد بر مارمولک بسیار کمتر از ضربهٔ رو به پایین ناشی از نیروی گرانش است پس نقشی اساسی در نگه داشتن مارمولک بازی نمی‌کند واین فشردن پا و نیروی مقاومت آب در مقابل حرکت آن است که عامل اصلی نگهداشتن مارمولک به روی آب است.

۳۳●●- *پرش به بالا قبل از برخورد آسان‌بر* به ته مسیر. پس از پاره شدن کابل و کار نکردن دستگاه ایمنی، اتاقک آسان‌بر فاصلهٔ $36m$ را به صورت سقوط آزاد پایین می‌آید. در طی برخورد در پایین، یک مسافر $90kg$ در $5/0ms$ متوقف می‌شود (فرض کنید مسافر و اتاقک هیچ‌کدام واجهش ندارند). بزرگی (الف) ضربه و (ب) نیروی میانگینی که در طی برخورد از طرف آسان‌بر بر مسافر وارد می‌شود چقدر است؟ اگر مسافر درست قبل از برخورد آسان‌بر به ته مسیر در اتاقک آسان‌بر با تندی میانگین $7/0m/s$ به سمت بالا پرش کند، بزرگی (پ) ضربه و (ت) نیروی میانگین وارد به مسافر (فرض کنید توقف در همان مدت رخ می‌دهد) چقدر است؟

حل: (الف) $v^2-v_0^2=2gh\Rightarrow v=\sqrt{2gh}$

$$v=\sqrt{(2)(9/8)(36)}=26/5m/s$$

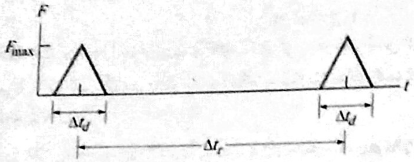
$$J=\Delta P=m\Delta v=(90)(26/5)=2385\,kg\cdot m/s$$

$$\overline F=\frac{J}{\Delta t}=\frac{2385}{5\times10^{-3}}=4/77\times10^5\,N$$

(ب) $J=\Delta P=m(v-v')=(90)[(26/5)-(-7)]$
$$=3015\,kg\cdot m/s$$

$$\overline F=\frac{J}{\Delta t}=\frac{3015}{5\times10^{-3}}=6/03\times10^5\,N$$

۳۴●●- *دو نیروی میانگین*. جریان پیوسته‌ای از گلوله‌های برف هر یک به جرم $0/250\,kg$ با تندی $4/00m/s$ به طور عمود به سمت دیوار پرتاب می‌شوند. شکل ۹-۵۴ بزرگی F نیروی وارد بر دیوار را به صورت تابعی از t برای دو تا از گلوله‌های برفی برخورد کننده، به دست می‌دهد. برخوردها در بازهٔ زمانی $\Delta t_r=50/0\,m/s$ تکرار می‌شوند و به مدت $\Delta t_d=10\,ms$ دوام دارند. مثلثهای متساوی الساقین ایجاد شده روی نمودار با هر برخورد به نیروی بیشینهٔ $F_{max}=200N$ می‌رسند. در حین هر برخورد، بزرگی (الف) برخورد و (ب) میانگین نیروی وارد بر دیوار چقدر است؟ (پ) در حین بازهٔ زمانی چندین برخورد بزرگی میانگین نیروی وارد بر دیوار چقدر است؟



شکل ۹-۵۴ مسئلهٔ ۳۴

حل: (الف) ضربه را می‌توان از محاسبه سطح زیر منحنی نیرو- زمان به دست آورد. سطح زیر منحنی با توجه به شکل به صورت مثلث است لذا بزرگی ضربه از محاسبه زیر به دست می‌آید

$$J=\frac{1}{2}(F_{max})(\Delta t)=\frac{1}{2}(200N)(10\times10^{-3}\,s)=1/0\,N\cdot s$$

(ب) از معادلهٔ ۹-۳۱ می‌توان نوشت

$$F_{ave}=\frac{J}{\Delta t}=\frac{1/0\,N\cdot s}{0/01s}=100\,N$$

(پ) اگر N برخورد رخ دهد در این صورت تعداد ضربه N و تعداد بازهٔ زمانی نیز N برابر خواهد بود و لذا نیروی میانگین وارد دیوار برابر است با

$$F_{ave}=\frac{NJ}{N\Delta t}=\frac{1/0\,N\cdot s}{50\times10^{-3}\,s}=20/0\,N$$

۳۵●●- یک بازیکن فوتبال توپ ساکنی به جرم $0/45kg$ را شوت می‌کند. پای بازیکن به مدت $3/0\times10^{-3}\,s$ با توپ در تماس است و نیروی ضربه با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$F(t)=[(6/0\times10^6)t-(2/0\times10^9)t^2]N$$

برای $0\le t\le3/0\times10^{-3}\,s$ ، که t برحسب ثانیه است، مطلوب است بزرگی (الف) ضربه روی توپ بر اثر شوت، (ب) میانگین نیروی وارد به توپ از طرف پای بازیکن در مدت زمان تماس، (پ) بیشینهٔ نیرو روی توپ از طرف پای بازیکن در مدت زمان تماس و (ت) سرعت توپ بلافاصله پس از جداشدن آن از پای بازیکن. SSM

حل: (الف)

$$J=\int F\,dt=\int_0^{3\times10^{-3}}[(6/0\times10^6)t-(2/0\times10^9)t^2]dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}(6/0\times10^6)t^2-\frac{1}{3}(2/0\times10^9)t^3\right]_0^{3\times10^{-3}}=9/0\,N\cdot s$$

(ب) برای نیروی میانگین داریم

$$F_{ave}=\frac{J}{\Delta t}=\frac{9/0\,N/s}{3/0\times10^{-3}\,s}=3/0\times10^3\,N$$

(پ) برای به دست آوردن زمانی که در ان نیرو بیشینه است باید از رابطهٔ $F(t)$ نسبت به زمان مشتق گرفته و مساوی صفر قرار داد.

$$\frac{dF}{dt} = ۶/۰\times۱۰^{۶} - ۴/۰\times۱۰^{۹}\, t = ۰ \Rightarrow t = ۱/۵\times۱۰^{-۳}\,\mathrm{s}$$

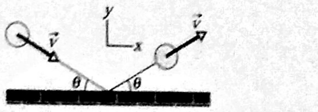
در این لحظه نیروی بیشینه برابر است با

$$F_{max} = (۶/۰\times۱۰^{۶})(۱/۵\times۱۰^{-۳}) - (۲/۰\times۱۰^{۹})(۱/۵\times۱۰^{-۳})^{۲}$$
$$= ۴/۵\times۱۰^{۳}\,\mathrm{N}$$

(ت) چنانچه m را جرم توپ و v را تندی توپ درست پس از ضربهٔ پا در نظر بگیریم، با توجه به اینکه توپ ابتدا ساکن است خواهیم داشت

$$J = mv - ۰ \Rightarrow v = \frac{J}{m} = \frac{۹/۰\,\mathrm{N/s}}{۰/۴۵\mathrm{kg}} = ۲۰\,\mathrm{m/s}$$

●●۳۶- در دید از بالای شکل ۹-۵۵ گلوله‌ای به جرم $۳۰۰\mathrm{g}$ با تندی v برابر $۶/۰\,\mathrm{m/s}$ با زاویهٔ θ برابر ۳۰° به دیواری برخورد می‌کند و سپس با همان تندی و همان زاویه برمی‌گردد. گلوله به مدت $۱۰\mathrm{ms}$ با دیوار در تماس است. به شکل نمادهای بردار-یکه (الف) ضربهٔ وارد به گلوله توسط دیوار و (ب) میانگین نیروی وارد به دیوار توسط گلوله چقدر است؟



شکل ۹-۵۵ مسئلهٔ ۳۶

حل: (الف) با رابطهٔ $\vec{J} = \vec{P}_f - \vec{P}_i$ می‌توان ضربه را محاسبه کرد

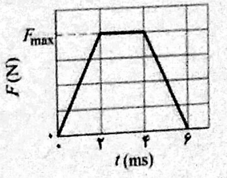
$$\vec{P}_i = m\vec{v}_i = m(v\cos\theta\,\hat{i} - v\sin\theta\,\hat{j}) = mv(\cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j})$$
$$\vec{P}_f = m\vec{v}_f = m(v\cos\theta\,\hat{i} + v\sin\theta\,\hat{j}) = mv(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j})$$

لذا داریم

$$\vec{J} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = ۲mv\sin\theta\,\hat{j} = ۲(۰/۳\mathrm{kg})(۶\,\mathrm{m/s})(\sin ۳۰^{\circ})\hat{j}$$
$$\vec{J} = (۱/۸\,\mathrm{N\cdot s})\hat{j}$$

(ب)
$$\vec{F}_{ave} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{(۱/۸\,\mathrm{N\cdot s})\hat{j}}{۱۰\times۱۰^{-۳}\,\mathrm{s}} = (۱۸۰\,\mathrm{N})\hat{j}$$

●●۳۷- شکل ۹-۵۶ نمودار تقریبی تغییرات بزرگی نیرو و برحسب زمان را در حین برخورد یک گلولهٔ $۵۸\mathrm{g}$ به دیوار نشان می‌دهد. سرعت اولیهٔ گلوله $۳۴\mathrm{m/s}$ و عمود بر دیوار است؛ گلوله با تندی یکسان و همچنین عمود بر دیوار به عقب برمی‌گردد. نیروی F_{max}، بیشینهٔ نیروی وارد به دیوار در حین برخورد چقدر است؟ GO



شکل ۹-۵۶ مسئلهٔ ۳۷

حل: جهت برگشت توپ را مثبت فرض می‌کنیم. از معادله ۹-۳۱ ضربه برابر است با

$$\vec{J} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i \Rightarrow J = mv - m(-v) = ۲mv$$
$$= ۲(۰/۰۵۸\mathrm{kg})(۳۴\,\mathrm{m/s}) = ۳/۹\,\mathrm{kg\cdot m/s}$$

از طرفی ضربه برابر است با مساحت زیر منحنی نیرو-زمان. سطح زیر منحنی ذوزنقه است لذا داریم

$$J = \frac{۱}{۲}(۲\mathrm{s} + ۶\mathrm{s})(F_{max}) = (۴\,\mathrm{s})(F_{max})$$

از مقایسهٔ دو رابطه می‌توان F_{max} را به دست آورد

$$F_{max} = \frac{۳/۹}{۴\times۱۰^{-۳}} = ۹۷۵\,\mathrm{N}$$

●●۳۸- قرصی به جرم $۰/۲۵\mathrm{kg}$ در آغاز ساکن است و روی سطح یخی با اصطکاک قابل چشمپوشی قرار دارد. در زمان $t=۰$ یک نیروی افقی شروع به حرکت دادن قرص می‌کند. نیرو با رابطهٔ $\vec{F} = (۱۲/۰ - ۳/۰۰t^{۲})\hat{i}$، که $\vec{F}$ برحسب نیوتون و t برحسب ثانیه است، داده شده و آنقدر اثر می‌کند تا بزرگی آن صفر شود. (الف) بزرگی ضربه روی قرص توسط نیرو بین $t = ۰/۵۰۰\mathrm{s}$ و $t = ۱/۲۵\mathrm{s}$، چقدر است؟ (ب) تغییر در اندازه حرکت قرص بین $t=۰$ و لحظه‌ای که در آن $F=۰$ می‌شود، چقدر است؟

حل: (الف)

$$J = \int_{t_۱}^{t_۲} F dt = \int_{t_۱}^{t_۲} (۱۲/۰ - ۳/۰t^{۲})dt = (۱۲t - t^{۳})\Big|_{۰/۵s}^{۱/۲۵s}$$
$$= ۷/۱۷\,\mathrm{N\cdot s}$$

(ب) با توجه به رابطهٔ نیرو $F = ۱۲/۰ - ۳/۰t^{۲}$ و قرار دادن $F=۰$ زمان متناظر با آن به دست می‌آید $t_۲ = ۲\mathrm{s}$. در نتیجه داریم

$$\Delta P = \int_{t_۱}^{t_۲} F\,dt = \int_{t_۱}^{t_۲} (۱۲/۰ - ۳/۰t^{۲})dt = (۱۲t - t^{۳})\Big|_{۰}^{۲s}$$
$$= ۱۶\,\mathrm{N\cdot s}$$

●۳۹- مردی به جرم $۹۱\mathrm{kg}$ که روی سطح بدون اصطکاکی ایستاده است به سنگی به جرم $۶۸\mathrm{g}$ که جلوی پایش قرار دارد لگد می‌زند و به آن $۴/۰\mathrm{m/s}$ تندی می‌دهد. در نتیجه این عمل، مرد چه سرعتی را کسب می‌کند؟ SSM

حل: چون هیچ نیروی افقی بر دستگاه مرد-سنگ وارد نمی‌شود لذا اندازه حرکت خطی در این راستا پایستار است. با توجه به اینکه در ابتدا دستگاه ساکن بوده لذا داریم.

$$m_۱v_۱ + m_۲v_۲ = ۰$$
$$v_۱ = -\frac{m_۲v_۲}{m_۱} = -\frac{(۶۸\times۱۰^{-۳}\,\mathrm{kg})(۴\,\mathrm{m/s})}{۹۱\mathrm{kg}} = -۳/۰\times۱۰^{-۳}\,\mathrm{m/s}$$

علامت منفی بیانگر این است که مرد در جهت مخالف جهت حرکت سنگ، حرکت می‌کند.

●۴۰- یک سفینهٔ فضایی، وقتی موتور موشک (با جرم $۴m$) مصرف شدهٔ آن جدا شده و با تندی $۸۲\mathrm{km/h}$ نسبت به اتاقک فرمان (با جرم m) به سمت عقب برود، با تندی $۴۳۰۰\mathrm{km/h}$ نسبت به زمین حرکت می‌کند. تندی اتاقک فرمان پس از جدا شدن از موتور نسبت به زمین چقدر است؟

حل: چون هیچ نیروی خارجی بر دستگاه موتور موشک- اتاقک فرمان $(m_۲, m_۱)$ وارد نمی‌شود لذا پایستگی اندازه حرکت خطی برقرار است یعنی می‌توان نوشت

$$(m_۱ + m_۲)v_۰ = m_۱v_۱ + m_۲v_۲$$

باید رابطهٔ سرعت نسبی زیر را در نظر گرفته و $v_۲$ را جایگزین نمود

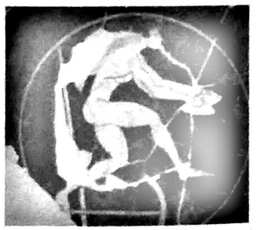
$\vec{v}_۲$(سرعت موشک به زمین) = $\vec{v}_{نسبی}$(سرعت موشک به اتاقک) + $\vec{v}_۱$(سرعت اتاقک به زمین)

و با توجه به اینکه $\vec{v}_{نسبی}$ در خلاف جهت $\vec{v}_۱$ لذا $v_۲ = v_۱ - v_{نسبی}$ که این را جایگزین می‌کنیم

$$(m_۱ + m_۲)v_۰ + m_۱v_۱ + m_۲(v_۱ - v_{نسبی}) = (m_۱ + m_۲)v_۱ - m_۲v_{نسبی}$$

$$v_۱ = v_۰ + \frac{m_۲}{m_۱ + m_۲}v_{نسبی} = ۴۳۰۰\,\mathrm{km/h} + \frac{(۴m_۱)}{m_۱ + ۴m_۱}(۸۲\,\mathrm{km/h})$$
$$= ۴/۳۶\times۱۰^{۳}\,\mathrm{km/h}$$

●●۴۱- در المپیک سال ۷۰۸ قبل از میلاد، برخی از ورزشکاران در مسابقهٔ پرش طول در جا از وزنه‌هایی که آنها را *هالتر* می‌نامیدند استفاده می‌کردند (شکل ۹-۵۷). آنها وزنه‌ها را درست قبل از پرش به جلو و بالا آورده و در موقع پرش آنها را به سمت پایین تاب داده و به عقب پرتاب می‌کردند. فرض کنید در زمان حال یک پرش‌کنندهٔ طول به جرم $۷۸\mathrm{kg}$ به همین ترتیب از دو هالتر $۵/۵۰\mathrm{kg}$ استفاده می‌کند و آنها را به طور افقی به سمت عقب در بیشینهٔ ارتفاعش به گونه‌ای پرتاب می‌کند که سرعت افقی آنها نسبت به زمین صفر است. فرض کنید سرعت پرش او با هالترها یا بدون آنها برابر $\vec{v} = (۹/۵\hat{i} + ۴/۰\hat{j})\,\mathrm{m/s}$ و در سطح موقع پرش فرود می‌آید. استفاده از هالترها برد او را چقدر افزایش می‌دهد؟ [redacted]



شکل ۹-۵۷ مسئلهٔ ۴۱

حل: اصل پایستگی اندازه حرکت خطی را برای نقطهٔ اوج، محلی که وزنه‌ها را رها می‌کند در نظر می‌گیریم.

m جرم هالتر و M جرم ورزشکار است.

$$(M + ۲m)v_x = Mv'_x$$
$$v'_x = \frac{M + ۲m}{M}\times v_x \qquad v_x = \frac{۸۹}{۷۸}\times ۹/۵ = ۱۰/۸۴\,\mathrm{m/s}$$

زمانی که طول می‌کشد تا ورزشکار به نقطهٔ اوج برسد برابر است با

$$t = \frac{v_y}{g} = \frac{۴}{۹/۸} = ۰/۴\mathrm{s}$$

مسافت افقی برای زمان اوج گرفتن ورزشکار برابر است با:

$$R_۱ = v_x t = ۹/۵\times۰/۴ = ۳/۸\,\mathrm{m}$$

مسافتی که او هنگام پایین آمدن به صورت افق طی می‌کند برابر است با:

$$R_۲ = v'_x t = ۱۰/۸۴\times۰/۴ = ۴/۳۴\,\mathrm{m}$$

پس تغییر در برد برابر است با:

$$R_۲ - R_۱ = ۴/۳۴ - ۳/۸ = ۰/۵۴\,\mathrm{m}$$

●●۴۲- یک جعبهٔ آشغال به جرم $۴/۰\mathrm{kg}$ در حالی که روی سطح بدون اصطکاکی می‌لغزد منفجر و به دو قسمت $۲\mathrm{kg}$ تقسیم می‌شود، یکی با تندی $۳/۰\mathrm{m/s}$ به سمت شمال و دیگری با تندی $۵/۰\mathrm{m/s}$ و با زاویهٔ ۳۰° به سمت شمال شرق حرکت می‌کند. تندی اولیهٔ جعبه چقدر است؟

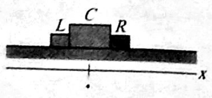
حل: طبق معمول سمت شرق را $+x$ و سمت شمال را $+y$ در نظر می‌گیریم. چون سطح بدون اصطکاک و نیروی انفجار داخلی است لذا پایستگی اندازه حرکت خطی برقرار است. یعنی داریم

$$m\vec{v}_۰ = m_۱\vec{v}_۱ + m_۲\vec{v}_۲$$
$$= m_۱v_۱\,\hat{j} + m_۲v_۲\cos ۳۰^{\circ}\,\hat{i} + m_۲v_۲\sin ۳۰^{\circ}\,\hat{j}$$
$$\vec{v}_۰ = \frac{m_۲v_۲\cos ۳۰^{\circ}}{m}\hat{i} + \left(\frac{m_۱v_۱ + m_۲v_۲\sin ۳۰^{\circ}}{m}\right)\hat{j}$$

مشاهده می‌شود که $\vec{v}_۰$ دو مؤلفه دارد و ضرایب $\hat{i}$ و $\hat{j}$ به ترتیب مؤلفه‌های $v_{۰x}$ و $v_{۰y}$ بردار $\vec{v}_۰$ هستند لذا بزرگی سرعت اولیهٔ جعبه برابر است با

$$v_۰ = \sqrt{v_{۰x}^{۲} + v_{۰y}^{۲}} = \sqrt{(۲/۱۶)^{۲} + (۲/۷۵)^{۲}} = ۳/۵\,\mathrm{m/s}$$

●●۴۳- شکل ۹-۵۸ یک موشک دو طرفه را نشان می‌دهد که در آغاز ساکن است و روی کف بدون اصطکاکی قرار دارد و مرکز آن در مبداء محور x واقع است. موشک شامل یک قطعهٔ مرکزی C (با جرم $M = ۶/۰۰\mathrm{kg}$) و قطعه‌های L و R است (هر یک با جرم $m = ۲/۰۰\mathrm{kg}$) که در سمت چپ و راست قرار



شکل ۹-۵۸ مسئلهٔ ۴۳

دارند. یک انفجار کوچک می‌تواند هر یک از قطعه‌های دو طرف را در امتداد محور x از قطعهٔ C دور سازد. ترتیب به این قرار است: (۱) در زمان $t=۰$ قطعهٔ L با تندی $۳/۰۰\mathrm{m/s}$ نسبت به سرعتی که انفجار به باقی موشک می‌دهد به طرف چپ پرتاب می‌شود. (۲) سپس، در زمان $t = ۰/۸۰\mathrm{s}$، قطعهٔ R با تندی $۳/۰۰\mathrm{m/s}$ نسبت به سرعتی که قطعهٔ C بعداً کسب می‌کند به سمت راست پرتاب می‌شود. در $t = ۲/۸۰\mathrm{s}$، مطلوب است (الف) سرعت قطعهٔ C و (ب) مکان مرکز آن.

است و اصطکاک وجود ندارد
حل: چون نیروی انفجار داخلی است و اصطکاک وجود ندارد لذا پایستگی اندازه حرکت برقرار است. سرعت قطعهٔ L با توجه به سرعت نسبی آن برابر است با $v_L = v_1 - 3$ که v_1 سرعت قطعه‌های C و R پس از انفجار اول در $t = 0$ ، است. در نتیجه می‌توان نوشت

$$m_L(v_1 - 3) + (m_C + m_R)v_1 = 0$$
$$\Rightarrow v_1 = \frac{3m_L}{m_L + m_c + m_R} = \frac{3 \times 2}{10} = 0/6\,\text{m/s}$$

علامت مثبت بیانگر این است که قطعه C به سمت راست حرکت می‌کند. پس از انفجار دوم در $t = 0/80\,\text{s}$ ، قطعهٔ R با سرعت $3\,\text{m/s}$ نسبت به C به طرف راست پرتاب می‌شود. پایستگی اندازه حرکت می‌دهد.

$$(m_C + m_R)v_1 = m_C v_2 + m_R(v_2 + 3) \Rightarrow v_2 = -0/15\,\text{m/s}$$

علامت منفی بیانگر این است که قطعهٔ C پس از انفجار دوم به سمت چپ پرتاب می‌شود.
(ب) بین $t = 0$ و $t = 0/8\,\text{s}$ جابه‌جایی قطعهٔ مرکزی C برابر است با

$$\Delta x_1 = v_1 \Delta t_1 = (0/6\,\text{m/s})(0/8\,\text{s}) = 0/48\,\text{m}$$

و بین $t = 0/8\,\text{s}$ و $t = 2/8\,\text{s}$ جابه‌جایی قطعهٔ مرکزی C برابر است با

$$\Delta x_2 = v_2 \Delta t_2 = (-0/15\,\text{m/s})(2/8\,\text{s} - 0/8\,\text{s}) = -0/30\,\text{m}$$

در نتیجه جابه‌جایی خالص برابر است با

$$\Delta x = 0/48\,\text{m} - 0/30\,\text{m} = 0/18\,\text{m}$$

●●۴۴- جسمی با جرم m و تندی v نسبت به ناظر، بر اثر انفجار به دو قطعه تقسیم می‌شود، که یکی سه برابر سنگینتر از دیگری است و انفجار در عمق فضا رخ داده است. قطعهٔ سبکتر نسبت به ناظر متوقف می‌شود. چقدر انرژی جنبشی، وقتی که در چارچوب مرجع ناظر اندازه‌گیری شود، در حین انفجار به دستگاه اضافه می‌شود.
حل: قطعهٔ سبکتر را با زیرنویس ۱ و قطعهٔ سنگینتر را با زیرنویس ۲ مشخص می‌کنیم. چون هیچ نیروی خارجی به دستگاه وارد نمی‌شود و نیروی انفجار داخلی است لذا پایستگی اندازه حرکت برقرار است

$$(m_1 + m_2)\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

با توجه به داده‌های مسئله $v_1 = 0$ و $m_2 = 3m$ است لذا خواهیم داشت

$$4v = 3v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{3}{4}v$$

حال تغییر انرژی جنبشی دستگاه برابر است با

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$$
$$= \frac{1}{2}(3m_1)\left(\frac{3}{4}v\right)^2 - \frac{1}{2}(4m_1)v^2$$

با توجه به اینکه $m_1 = \frac{m}{4}$ است لذا

$$\Delta K = \frac{1}{6}mv^2$$

●●۴۵- ظرف ساکنی که در مبداء دستگاه مختصات xy واقع است، منفجر و به سه قطعه تقسیم می‌شود. درست پس از انفجار، یک قطعه، با جرم m ، با سرعت $(-30\,\text{m/s})\hat{i}$ حرکت می‌کند و قطعهٔ دوم، آنهم با جرم m ، با سرعت $(-30\,\text{m/s})\hat{j}$ حرکت می‌کند. سومین قطعه دارای جرم 3m است. درست پس از انفجار مطلوب است (الف) بزرگی و (ب) جهت سرعت قطعهٔ سوم.
حل: (الف) نیروی انفجار، نیروی داخلی است لذا پایستگی اندازه حرکت خطی برقرار است است، بنابراین داریم

$$0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3$$

با قرار دادن داده‌های مسئله خواهیم داشت

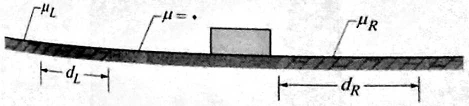
$$0 = m(-30\hat{i}) + m(-30\hat{j}) + 3m\vec{v}_3$$
$$\vec{v}_3 = (10\hat{i} + 10\hat{j})\,\text{m/s}$$

و بزرگی $\vec{v}_3$ برابر است با

$$v_3 = 10\sqrt{2}\,\text{m/s}$$

(ب) با توجه به اینکه مؤلفه‌های x و y سرعت برابرند لذا جهت آن تحت زاویهٔ 45° نسبت به جهت مثبت محور x است.

●●۴۶- در شکل ۹-۵۹ قطعهٔ ساکنی منفجر و به دو قطعهٔ L و R تقسیم می‌شود که روی سطح بدون اصطکاکی می‌لغزند و سپس به ناحیه‌های اصطکاک‌دار می‌رسند و در آنجا متوقف می‌شوند. قطعهٔ L ، با جرم $2/0\,\text{kg}$ با ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_L = 0/40$ مواجه می‌شود و قبل از توقف مسافت $d_L = 0/15\,\text{m}$ را طی می‌کند. قطعهٔ R با ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_R = 0/50$ مواجه می‌شود و قبل از توقف مسافت $d_R = 0/25\,\text{m}$ را طی می‌کند. جرم قطعه چقدر بوده است؟



شکل ۹-۵۹ مسئلهٔ ۴۶

حل: با کمک پایستگی انرژی بر روی سطوح با اصطکاک سرعت اولیه هر قطعه را به دست می‌آوریم. در اینجا انرژی جنبشی به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود لذا

$$\Delta E_L = \Delta U + \Delta K \Rightarrow \mu_L m_L g d_L = 0 + \frac{1}{2}m_L v_L^2$$
$$\Rightarrow v_L = \sqrt{2\mu_L g d_L} = 3/46\,\text{m/s}$$

و به طور مشابه داریم

$$v_R = \sqrt{2\mu_R g d_R} = 5/0\,\text{m/s}$$

حال در ناحیهٔ بدون اصطکاک هیچ نیروی خارجی به دستگاه وارد نمی‌شود و انفجار نیروی داخلی است لذا پایستگی اندازه حرکت خطی برقرار است

$$0 = m_R v_R - m_L v_L \Rightarrow m_R = \frac{v_L}{v_R}m_L = \frac{3/46}{5}(2/0)$$
$$= 1/39\,\text{kg}$$

در نتیجه جرم قطعه برابر است با

$$m = m_R + m_L = 1/39 + 2/0 = 3/39\,\text{kg}$$

●●۴۷- جسمی به جرم $20/0\,\text{kg}$ در میان فضا با تندی $200\,\text{m/s}$ در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. یک انفجار داخلی آن را به سه قسمت تقسیم می‌کند. یک قسمت، با جرم $10/0\,\text{kg}$ با تندی $100\,\text{m/s}$ در جهت مثبت محور y از نقطهٔ انفجار دور می‌شود. دومین قسمت، با جرم $4/00\,\text{kg}$ با تندی $500\,\text{m/s}$ در جهت منفی محور x حرکت می‌کند. (الف) بر حسب نمادهای بردار- یکه، سرعت قسمت سوم چیست؟ (ب) چه مقدار انرژی در انفجار آزاد می‌شود؟ از اثرهای مربوط به گرانش صرفنظر کنید. **SSM WWW**
حل: (الف) چون نیروی انفجار یک نیروی داخلی است لذا پایستگی اندازه حرکت خطی برقرار است. یعنی داریم

$$m\vec{v}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3$$
$$(20)(100\hat{i}) = (10)(100\hat{j}) + (4)(-500\hat{i}) + (6)(\vec{v}_3)$$

سرعت قطعهٔ سوم برحسب نمادهای بردار یکه عبارت است از

$$\vec{v}_3 = (1000\hat{i} - 167\hat{j})\,\text{m/s}$$

بزرگی $\vec{v}_3$ برابر است با

$$v_3 = \sqrt{(1000)^2 + (-167)^2} = 1014\,\text{m/s}$$

و جهت آن نیز از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-167}{1000}\right) = -9/48^\circ$$

(ب) انرژی آزاد شده در انفجار از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\Delta K = K_f - K_i = \left(\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_3 v_3^2\right) - \left(\frac{1}{2}Mv_0^2\right)$$
$$= \left[\frac{1}{2}(10)(100)^2 + \frac{1}{2}(4)(500)^2 + \frac{1}{2}(6)(1014)^2\right]$$
$$- \left[\frac{1}{2}(20)(200)^2\right] = 3/63 \times 10^6 - 4 \times 10^5$$
$$= 3/23 \times 10^6\,\text{J}$$

●●●۴۸- ذرهٔ A و ذرهٔ B توسط فنر فشرده‌ای که در بین آنهاست به هم نگهداشته شده‌اند. وقتی آنها رها شوند، فنر آنها را از هم جدا می‌کند و سپس آنها رها از فنر در دو جهت مخالف حرکت می‌کنند. جرم A دو برابر جرم B است و انرژی ذخیره شده در فنر $60\,\text{J}$ بوده است. فرض کنید جرم فنر ناچیز و تمام انرژی ذخیره شده در آن به ذره‌ها منتقل شده است. وقتی این انتقال کامل شد، انرژی جنبشی (الف) ذرهٔ A و (ب) ذرهٔ B چقدر است؟
حل: (الف) چون هیچ نیروی خارجی بر دستگاه فنر- دو جرم وارد نمی‌شود و نیروی فنری یک نیروی داخلی است لذا پایستگی اندازه حرکت خطی برقرار است.

$$0 = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B \Rightarrow 0 = 2m_B\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B$$
$$\Rightarrow \vec{v}_B = -2\vec{v}_A$$

از طرف دیگر پایستگی انرژی مکانیکی برقرار است.

$$E = K_A + K_B \Rightarrow 60\,J = K_A + \frac{1}{2}m_B v_B^2$$
$$= K_A + \frac{1}{2}(2m_A)(-2v_A)^2$$
$$60\,J = K_A + 2K_A = 3K_A \Rightarrow K_A = 20\,\text{J}$$

(ب) در نتیجه داریم

$$K_B = 60\,\text{J} - K_A = 60\,\text{J} - 20\,\text{J} \Rightarrow K_B = 40\,\text{J}$$

●۴۹- گلوله‌ای به جرم $10\,\text{g}$ به یک آونگ بالیستیک به جرم $2/0\,\text{kg}$ برخورد می‌کند. مرکز جرم آونگ به اندازهٔ $12\,\text{cm}$ در راستای قائم بالا می‌رود. با فرض اینکه گلوله در داخل آونگ باقی بماند، سرعت اولیهٔ گلوله را حساب کنید.
حل: گلوله با سرعت v با آونگ برخورد کاملاً ناکشسان می‌کند و مجموعهٔ گلوله و قطعه پس از برخورد دارای تندی V بوده و تا ارتفاع h بالا می‌روند و به ترتیب از پایستگی اندازه حرکت و انرژی مکانیکی داریم

$$mv = (M + m)V \Rightarrow v = \frac{M + m}{m}V \qquad (1)$$
$$\frac{1}{2}(M + m)V^2 = (M + m)gh \Rightarrow V = \sqrt{2gh} \qquad (2)$$

با قرار دادن V در رابطه (۱) خواهیم داشت

$$v = \frac{M + m}{m}\sqrt{2gh} = \frac{2\,\text{kg} + 0/01\,\text{kg}}{0/01\,\text{kg}}\sqrt{2(9/8\,\text{m/s}^2)(0/12\,\text{m})}$$
$$= 308/3\,\text{m/s}$$

●۵۰- یک گلولهٔ $5/2\,\text{g}$ که با تندی $672\,\text{m/s}$ حرکت می‌کند با یک قطعه چوب $700\,\text{g}$ ساکن، که روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد، برخورد می‌کند. گلوله با تندی کاهش یافتهٔ $428\,\text{m/s}$ از چوب خارج می‌شود. (الف) تندی حاصل در قطعه چقدر است؟ (ب) تندی مرکز جرم گلوله- قطعه چقدر است؟
حل: (الف) پایستگی اندازه حرکت خطی در برخورد برقرار است. لذا داریم

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$
$$(5/2\,\text{g})(672\,\text{m/s}) = (5/2\,\text{g})(428\,\text{m/s}) + (700\,\text{g})v_{2f}$$
$$v_{2f} = 1/81\,\text{m/s}$$

(ب) چون سرعت مرکز جرم در حین برخورد بدون تغییر می‌ماند می‌توان با به کار بردن یکی از دو رابطه زیر آن را به دست آورد

$$v_{\text{com}} = \frac{m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2} = \frac{(5/2\,\text{g})(672\,\text{m/s})}{5/2\,\text{g} + 700\,\text{g}} = 4/96\,\text{m/s}$$

یا

$$v_{\text{com}} = \frac{m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}}{m_1 + m_2}$$
$$= \frac{(5/2\,\text{g})(428\,\text{m/s}) + (700\,\text{g})(1/81\,\text{m/s})}{5/2\,\text{g} + 700\,\text{g}} = 4/96\,\text{m/s}$$

●●۵۱- در یکی از شهرهای آلاسکا برخورد وسیلهٔ نقلیه با گوزنها یک امر معمول است. فرض کنید اتومبیلی به جرم ۱۰۰۰kg در جادهٔ بسیار لغزنده‌ای با گوزن ساکنی به جرم ۵۰۰kg تصادف می‌کند و گوزن به کنار جاده پرت می‌شود. (الف) در این برخورد چند درصد از انرژی جنبشی اولیه به صورت سایر انرژیها تلف می‌شود؟ در عربستان سعودی به خاطر وجود شتر چنین تصادفهای خطرناکی رخ می‌دهد. (ب) اگر همین اتومبیل با شتری به جرم ۳۰۰kg تصادف کند چند درصد از انرژی جنبشی اولیه تلف می‌شود؟ (پ) به طور کلی، اگر جرم حیوان کاهش یابد، آیا درصد اتلاف افزایش می‌یابد یا کاهش؟

حل: (الف) اندازه حرکت خطی در حین تصادف تغییر نمی‌کند. M جرم خودرو و m جرم گوزن است.

$$p_i = p_f \Rightarrow Mv_i = (m+M)v_f$$

$$v_f = \frac{M}{(m+M)}v_i$$

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}(m+M)v_f^2 - \frac{1}{2}Mv_i^2$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}\frac{M^2}{(m+M)}v_i^2 - \frac{1}{2}Mv_i^2 = -\frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}v_i^2$$

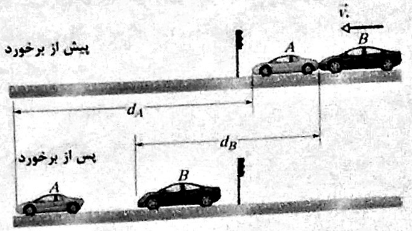
$$\frac{\Delta K}{K_i} = -\frac{m}{M+m} = -\%33$$

(ب) بنا به محاسبات قبلی:

$$\frac{\Delta K}{K_i} = \frac{-m}{M+m} = \frac{300}{1900+300} = -\%23$$

(پ) ملاحظه می‌شود، هر چه جرم حیوان کاهش یابد، درصد اتلاف کاهش می‌یابد.

●●۵۲- در قسمت «پیش از برخورد» شکل ۹-۶۰، اتومبیل A (جرم ۱۱۰۰kg) پشت چراغ راهنمایی ایستاده است که اتومبیل B (جرم ۱۴۰۰kg) از عقب به آن می‌زند. سپس دو اتومبیل با چرخهای قفل شده می‌لغزند تا وقتی که نیروی اصطکاک جادهٔ لغزنده (با μ_k کم برابر ۰/۱۳) آنها را در فاصله‌های $d_A = 8/2\text{m}$ و $d_B = 6/1\text{m}$ متوقف می‌کند. تندی (الف) اتومبیل A و (ب) اتومبیل B در شروع لغزیدن درست پس از برخورد چقدر است؟ (ب) با فرض اینکه اندازه حرکت خطی در حین برخورد پایسته است، تندی اتومبیل B را درست پیش از برخورد به دست آورید. (ت) توضیح دهید که چرا این فرض ممکن است معتبر نباشد.



شکل ۹-۶۰ مسئلهٔ ۵۲

حل: (الف) با استفاده از کار نیروی اصطکاک می‌توان سرعت هر اتومبیل را درست پس از برخورد به دست آورد

(الف)

$$W_A = \Delta K_A \Rightarrow -\mu_k m_A g d_A = 0 - \frac{1}{2}m_A v_{0A}^2$$

$$\Rightarrow v_{0A} = \sqrt{2\mu_k g d_A} = \sqrt{2(0/13)(9/8\,\text{m/s}^2)(8/2\,\text{m})} = 4/57\,\text{m/s}$$

(ب)

$$W_B = \Delta K_B \Rightarrow -\mu_k m_B g d_B = 0 - \frac{1}{2}m_B v_{0B}^2$$

$$\Rightarrow v_{0B} = \sqrt{2\mu_k g d_B} = \sqrt{2(0/13)(9/8\,\text{m/s}^2)(6/1\,\text{m})} = 3/94\,\text{m/s}$$

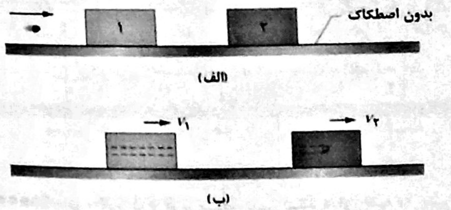
(پ) از پایستگی اندازه حرکت خطی داریم

$$m_A v_{0A} + m_B v_{0B} = m_B v_B \Rightarrow v_B = \frac{m_A v_{0A} + m_B v_{0B}}{m_B}$$

$$v_B = \frac{(1100\,\text{kg})(4/57\,\text{m/s}) + (1400\,\text{kg})(3/94\,\text{m/s})}{1400\,\text{kg}} = 7/53\,\text{m/s}$$

(ت) چون نیروی اصطکاک در تمام مراحل برخورد وجود دارد و قسمت زیادی از انرژی نیز صرف تغییر شکل آنها می‌شود.

●●۵۳- گلوله‌ای به جرم ۳/۵g به طور افقی به دو قطعهٔ ساکن روی یک میز صاف مطابق شکل ۹-۶۱ الف شلیک می‌شود. گلوله از قطعهٔ اول (جرم ۱/۲۰kg) عبور می‌کند و به داخل قطعهٔ دوم (جرم ۱/۸۰kg) فرو می‌رود. تندیهایی که در نتیجهٔ آن به اجسام می‌دهد، $v_1 = 0/630\,\text{m/s}$ و $v_2 = 1/40\,\text{m/s}$ است (شکل ۹-۶۱ ب). با صرفنظر کردن از جرمی که از قطعهٔ اول توسط گلوله جدا می‌شود، تندی گلوله را وقتی (الف) از قطعهٔ ۱ بیرون می‌آید و (ب) وقتی وارد آن می‌شود به دست آورید.



شکل ۹-۶۱ مسئلهٔ ۵۳

حل: (الف) با استفاده از پایستگی اندازه حرکت خطی برای دستگاه گلوله- قطعهٔ دوم، و فرض اینکه جرم گلوله m، سرعت آن پیش از برخورد به قطعهٔ اول v_i و پس از خروج از آن v_f باشد، می‌توان نوشت

$$mv_f = (m+m_2)v_2$$

$$(3/5\times10^{-3}\,\text{kg})v_f = (3/5\times10^{-3}\,\text{kg} + 1/8\,\text{kg})(1/4\,\text{m/s})$$

$$v_f = 721/4\,\text{m/s}$$

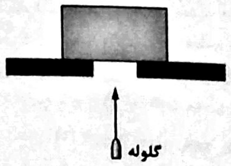
(ب) اکنون پایستگی اندازه حرکت خطی را برای دستگاه گلوله- قطعهٔ اول می‌نویسیم

$$mv_i = mv_f + m_1v_1$$

$$(3/5\times10^{-3}\,\text{kg})v_i = (3/5\times10^{-3}\,\text{kg})(721/4\,\text{m/s}) + (1/2\,\text{kg})(0/63\,\text{m/s})$$

$$v_i = 937/4\,\text{m/s}$$

●●۵۴- در شکل ۹-۶۲ یک گلولهٔ ۱۰g با تندی ۱۰۰۰m/s مستقیماً به سمت بالا حرکت می‌کند و به قطعهٔ ۵/۰kg که در آغاز ساکن است برخورد و از میان مرکز جرم آن عبور می‌کند. گلوله موقع خروج از قطعه با تندی ۴۰۰m/s مستقیماً به سمت بالا حرکت می‌کند. قطعه تا چه ارتفاع بیشینه‌ای نسبت به مکان اولیه بالا می‌رود؟



شکل ۹-۶۲ مسئلهٔ ۵۴

حل: سرعت قطعه پس از برخورد را با توجه به پایستگی اندازه حرکت خطی به دست می‌آوریم

$$mv_i = mv_f + Mv_0$$

در این رابطه m جرم گلوله، v_i تندی گلوله پیش از برخورد، v_f تندی گلوله پس از برخورد، M جرم قطعه و v_0 تندی قطعه درست پس از برخورد است.

$$(0/01\,\text{kg})(1000\,\text{m/s}) = (0/01\,\text{kg})(400\,\text{m/s}) + (5\,\text{kg})v_0$$

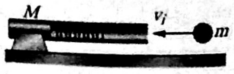
$$\Rightarrow v_0 = 1/2\,\text{m/s}$$

اکنون پایستگی انرژی مکانیکی را پس از برخورد برای قطعه در نظر می‌گیریم با توجه به اینکه v_0 سرعت اولیه قطعه است.

$$0 + \frac{1}{2}Mv_0^2 = mgh + 0 \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$h = \frac{(1/2\,\text{m/s})^2}{2(9/8\,\text{m/s}^2)} \Rightarrow h = 0/073\,\text{m}$$

●●۵۵- در شکل ۹-۶۳ گلوله‌ای به جرم $m = 60\,\text{g}$ با تندی $v_i = 22\text{m/s}$ به داخل لولهٔ یک تفنگ فنری به جرم $M = 240\,\text{g}$، که در حال سکون روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد، شلیک می‌شود. گلوله در لوله در نقطه‌ای که فنر به بیشینهٔ مقدار فشردگی‌اش می‌رسد، گیر می‌کند. فرض کنید که افزایش انرژی گرمایی بر اثر اصطکاک بین گلوله و لوله قابل چشمپوشی است. (الف) تندی تفنگ فنری پس از آنکه گلوله در لولهٔ تفنگ متوقف شد چقدر است؟ (ب) چه کسری از انرژی جنبشی اولیهٔ گلوله در فنر ذخیره می‌شود؟



شکل ۹-۶۳ مسئلهٔ ۵۵

حل: (الف) با توجه به اینکه برخورد کاملاً ناکشسان است با استفاده از پایستگی اندازه حرکت خطی و با فرض اینکه v سرعت دستگاه گلوله- فنر پس از برخورد باشد می‌توان نوشت

$$mv_i = (m+M)v \Rightarrow v = \frac{mv_i}{m+M}$$

$$v = \frac{(60\times10^{-3}\,\text{kg})(22\,\text{m/s})}{(60\times10^{-3}\,\text{kg}) + (240\times10^{-3}\,\text{kg})} \Rightarrow v = 4/4\,\text{m/s}$$

(ب)

$$K_i = \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}(60\times10^{-3}\,\text{kg})(22\,\text{m/s})^2 = 14/52\,\text{J}$$

$$K_f = \frac{1}{2}(m+M)v^2 = \frac{1}{2}(60\times10^{-3}\,\text{kg} + 240\times10^{-3}\,\text{kg})(4/4)^2 = 2/90\,\text{J}$$

$$\text{کسر} = \frac{|K_f - K_i|}{K_i} = \frac{|2/90\,\text{J} - 14/52\,\text{J}|}{14/52} = 0/8$$

●●۵۶- یک برخورد کاملاً ناکشسان بین دو گلولهٔ بتونه‌ای خیس که در امتداد قائم به سمت هم حرکت می‌کنند، رخ می‌دهد. درست پیش از برخورد یکی از گلوله‌ها با جرم ۳/۰kg با تندی ۲۰ m/s به سمت بالا حرکت می‌کند و گلولهٔ دیگر با جرم ۲/۰kg با تندی ۱۲m/s به سمت پایین حرکت می‌کند. دو گلولهٔ بتونه‌ای ترکیب شده تا چه ارتفاعی نسبت به نقطهٔ برخورد بالا می‌رود؟ (از مقاومت هوا چشمپوشی کنید.)

حل: چون زمان برخورد کوتاه است لذا اثر نیروی وزن ناچیز است و با تقریب می‌توان از پایستگی اندازه حرکت خطی استفاده کرد

$$m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1+m_2)v$$

$$(3\,\text{kg})(20\,\text{m/s}) - (2\,\text{kg})(12\,\text{m/s}) = (3\,\text{kg} + 2\,\text{kg})v$$

$$\Rightarrow v = 7/2\,\text{m/s}$$

مثبت بودن سرعت بیانگر این است که دو گلوله پس از برخورد به سمت بالا حرکت می‌کنند. از پایستگی انرژی داریم

$$0 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 = (m_1+m_2)gh + 0$$

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(7/2\,\text{m/s})^2}{2(9/8\,\text{m/s}^2)} \Rightarrow h = 2/64\,\text{m}$$

●●۵۷- قطعه‌ای به جرم ۵/۰kg با تندی ۳/۰m/s با قطعهٔ دیگری به جرم ۱۰kg که با تندی ۲/۰m/s در همان جهت در حرکت است، برخورد می‌کند. پس از برخورد مشاهده می‌شود که جسم ۱۰kg با تندی ۲/۵m/s در همان جهت اولیه حرکت می‌کند. (الف) تندی جسم ۵kg بی‌درنگ پس از برخورد چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی کل دستگاه دو قطعه بر اثر برخورد چقدر تغییر می‌کند؟ (پ) حال فرض کنید که قطعهٔ ۱۰kg تندی ۴/۰m/s را کسب کند. آن وقت، تغییر انرژی جنبشی کل چقدر است؟ (ت) نتیجهٔ به دست آمده در قسمت (پ) را شرح دهید. ILW

حل: (الف) جهت حرکت قطعه‌ها را مثبت در نظر می‌گیریم. از پایستگی اندازه حرکت خطی داریم

$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$

$(5\,kg)(3\,m/s) + (10\,kg)(2\,m/s) = (5\,kg)v_{1f} + (10\,kg)(2.5\,m/s)$

$\Rightarrow v_{1f} = 2\,m/s$

(ب) برای تغییر در انرژی جنبشی داریم

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 - \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 - \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2$$

که با قرار دادن داده‌ها، داریم

$\Delta K = -1.25\,J$

علامت منفی بیانگر کاهش انرژی جنبشی است.

(پ) مجدداً از پایستگی اندازه حرکت خطی استفاده می‌کنیم

$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v'_{1f} + m_2v'_{2f}$

$(5\,kg)(3\,m/s) + (10\,kg)(2\,m/s) = (5\,kg)v'_{1f} + (10\,kg)(4\,m/s)$

$\Rightarrow v'_{1f} = -1\,m/s$

علامت منفی بیانگر تغییر جهت ذرهٔ اول است. تغییر انرژی جنبشی در این حالت برابر است با

$\Delta K = K'_f - K_i = 82.5 - 42.5 = 40\,J$

(ت) مثبت بودن Δk بیانگر انرژی‌زا بودن برخورد است و خلق این انرژی اضافی در صورتی ممکن است که مثلاً انرژی شیمیایی آزاد شده باشد.

●●●۵۸- در شکل ۹-۶۴، قطعهٔ ۲ (جرم ۱/۰kg) ساکن است و روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد و به فنری با ثابت فنر ۲۰۰N/m که کشیده نشده و انتهای دیگرش ثابت است متصل است. انتهای دیگر فنر به دیوار وصل است. قطعهٔ ۱ (جرم ۲/۰kg) که با تندی $v_1 = 4.0\,m/s$ حرکت می‌کند با قطعهٔ ۲ برخورد می‌کند و دو قطعه به هم می‌چسبند. در لحظه‌ای که متوقف می‌شوند فنر چقدر فشرده می‌شود؟

شکل ۹-۶۴ مسئلهٔ ۵۸

حل: مسئله دارای دو مرحله است. مرحلهٔ یک برخورد کاملاً ناکشسان است و از پایستگی اندازه حرکت خطی سرعت دستگاه فنر- دو قطعه پس از برخورد به دست می‌آید

$$m_1v_1 + 0 = (m_1 + m_2)v \Rightarrow v = \frac{m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

$$v = \frac{(2.0\,kg)(4.0\,m/s)}{2.0\,kg + 1\,kg} = 2.67\,m/s$$

مرحله دوم شامل فشردگی فنر است که از پایستگی انرژی می‌توان مقدار فشردگی فنر را به دست آورد

$E_1 = E_2$

$$0 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{1}{2}kx^2 + 0$$

$(3\,kg)(2.67)^2 = (200\,N/m)x^2 \Rightarrow x = 0.327\,m$

●●●۵۹- در شکل ۹-۶۵ قطعهٔ ۱ (جرم ۲/۰kg) با تندی ۱۰m/s به سمت راست و قطعهٔ ۲ (جرم ۵/۰kg) با تندی ۳/۰ m/s به سمت راست حرکت می‌کنند. سطح بدون اصطکاک است و فنری با ثابت فنر ۱۱۲۰ N/m به قطعهٔ ۲ متصل است. وقتی قطعه‌ها برخورد کنند، در لحظه‌ای که دو قطعه سرعت یکسانی داشته باشند فشردگی فنر بیشینه است. بیشینهٔ فشردگی فنر چقدر است؟ ILW

شکل ۹-۶۵ مسئلهٔ ۵۹ و ۱۲۶

حل: با توجه به اینکه پس از برخورد وقتی دو قطعه سرعت یکسانی دارند فشردگی فنر بیشینه است می‌توان ابتدا از پایستگی اندازه حرکت خطی سرعت دو قطعه پس از برخورد را به دست آورده و سپس بیشینهٔ فشردگی از پایستگی انرژی به دست می‌آید.

$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$

$(2.0\,kg)(10\,m/s) + (5.0\,kg)(3\,m/s) = (2.0\,kg + 5.0\,kg)v$

$\Rightarrow v = 5\,m/s$

سپس داریم

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

که با قرار دادن $v = 5\,m/s$ و داده‌های مسئله بیشینهٔ فشردگی فنر به دست می‌آید.

$x = 0.25\,m$

●۶۰- دو گلوله از تیتانیوم با تندی یکسان به سمت هم می‌آیند و به طور کشسان برخورد رودررو می‌کنند. پس از برخورد، یکی از گلوله‌ها که جرمش ۳۰۰g است، ساکن می‌ماند. (الف) جرم گلولهٔ دیگر چقدر است؟ (ب) اگر تندی اولیه هر گلوله ۲/۰۰m/s باشد، تندی مرکز جرم دو- گلوله چقدر است؟

حل: (الف) برای برخورد یک بعدی کشسان طبق معادلهٔ ۹-۷۵ داریم

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{2i}$$

با قرار دادن داده‌های مسئله خواهیم داشت

$$0 = \frac{(0.3 - m_2)}{0.3 + m_2}v_0 + \frac{2m_2}{0.3 + m_2}(-v_0) \Rightarrow m_2 = 0.1\,kg$$

(ب) $$v_{com} = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{(0.3)(2) + (0.1)(-2)}{0.3 + 0.1} = 1\,m/s$$

●۶۱- ارابه‌ای با جرم ۳۴۰g که با تندی اولیهٔ ۱/۲m/s روی تخت هوای مستقیم و بدون اصطکاکی در حرکت است با ارابهٔ دیگری به جرم نامعلوم که در ابتدا ساکن است برخورد کشسان می‌کند. پس از برخورد، ارابهٔ اول با تندی ۰/۶۶m/s به حرکت در جهت اولیه‌اش ادامه می‌دهد. (الف) جرم ارابهٔ دوم چقدر است؟ (ب) تندی آن پس از برخورد چقدر است؟ (پ) تندی مرکز جرم دو ارابه چقدر است؟ SSM

حل: (الف) برای برخورد یک بعدی کسشان در حالتی که $v_{2i} = 0$ است از معادلهٔ ۹-۷۵ یا معادله ۹-۶۷ داریم

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} \Rightarrow 0.66 = \frac{(0.34) - m_2}{(0.34) + m_2}(1.2)$$

$\Rightarrow m_2 = 0.099\,kg$

(ب) برای ارابهٔ دوم و در حالتی که $v_{2i} = 0$ است از معادلهٔ ۹-۷۶ یا ۹-۶۸، داریم

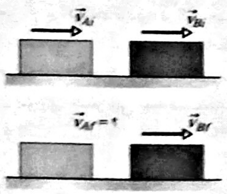
$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i} = \frac{2(0.34)}{(0.34) + (0.099)}(1.2)$$

$v_{2f} = 1.86\,m/s$

(پ) $$v_{com} = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{(0.34)(1.2) + (0.099)(1.86)}{(0.34) + (0.099)}$$

$= 0.93\,m/s$

●۶۲- در شکل ۹-۶۶، قطعهٔ A (جرم ۱/۶kg) در امتداد سطح بدون اصطکاکی به سمت قطعهٔ B (جرم ۲/۴kg) می‌لغزد. جهت سه تا از سرعتها پیش از برخورد (i) و پس از برخورد (f) مشخص شده‌اند؛ تندیهای مربوطه عبارت‌اند از $v_{Ai} = 5.5\,m/s$، $v_{Bi} = 2.5\,m/s$ و $v_{Bf} = 4.9\,m/s$. مطلوب است (الف) تندی و (ب) جهت (چپ یا راست) سرعت $\vec{v}_{Af}$. (پ) آیا برخورد کشسان است؟



شکل ۹-۶۶ مسئلهٔ ۶۲

حل: (الف) از پایستگی اندازه حرکت خطی داریم

$m_Av_{Ai} + m_Bv_{Bi} = m_Av_{Af} + m_Bv_{Bf}$

$(1.6)(5.5) + (2.4)(2.5) = (1.6)v_{Af} + (2.4)(4.9)$

$v_{Af} = 1.9\,m/s$

(ب) با توجه به مثبت بودن جواب v_{Af}، حرکت قطعهٔ A در همان جهت اولیه یا به سمت راست ادامه می‌یابد.

(پ) در برخورد کشسان $K_i = K_f$ است لذا K_i و K_f را محاسبه و مقایسه می‌کنیم

$$K_i = \frac{1}{2}m_Av_{Ai}^2 + \frac{1}{2}m_Bv_{Bi}^2 = \frac{1}{2}(1.6)(5.5)^2 + \frac{1}{2}(2.4)(2.5)^2$$

$= 31.7\,J$

$$K_f = \frac{1}{2}m_Av_{Af}^2 + \frac{1}{2}m_Bv_{Bf}^2 = \frac{1}{2}(1.6)(1.9)^2 + \frac{1}{2}(2.4)(4.9)^2$$

$= 31.7\,J$

مشاهده می‌شود که $K_i = K_f$ لذا برخورد کشسان است.

●●۶۳- جسمی به جرم ۲/۰kg با جسم دیگری که ساکن است برخورد کشسان می‌کند و در همان جهت اولیه و با یک چهارم تندی اولیه‌اش به حرکت ادامه می‌دهد. (الف) جرم جسم دیگر چقدر است؟ (ب) تندی مرکز جرم دو جسم در صورتی که تندی اولیهٔ جسم ۲/۰kg برابر ۴/۰m/s باشد، چقدر است؟ SSM

حل: (الف) برای برخورد کسشان یک بعدی و در حالتی که $v_{2i} = 0$ است از معادلهٔ ۹-۷۵ یا معادلهٔ ۹-۶۷، داریم

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i}$$

$$\frac{1}{4}v_{1i} = \frac{2 - m_2}{2 + m_2}v_{1i} \Rightarrow m_2 = 1.2\,kg$$

(ب) $$v_{com} = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{(2.0\,kg)(4.0\,m/s) + 0}{2.0\,kg + 1.2\,kg} = 2.5\,m/s$$

●●۶۴- قطعهٔ ۱ با جرم m_1 و تندی ۴/۰m/s در امتداد محور x روی سطح بدون اصطکاکی می‌لغزد و سپس با قطعهٔ ساکن ۲ با جرم $m_2 = 0.40m_1$ برخورد کشسان یک بعدی می‌کند. پس از آن، دو قطعه به ناحیه‌ای که ضریب اصطکاک جنبشی آن ۰/۵۰ است، می‌لغزند و متوقف می‌شوند. در این ناحیه چه مسافتی را (الف) قطعهٔ ۱ و (ب) قطعهٔ ۲، می‌لغزند؟

حل: برخورد کشسان یک بعدی است و در اینجا $v_{2i} = 0$ لذا معادله‌های ۹-۷۵ و ۹-۷۶ یا ۹-۶۷ و ۹-۶۸ را می‌توان به کار برد

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} = \frac{m_1 - 0.4m_1}{m_1 + 0.4m_1}(4\,m/s) = 1.71\,m/s$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i} = \frac{2m_1}{1.4m_1}(4\,m/s) = 5.71\,m/s$$

(الف) قطعهٔ ۱ پس از برخورد به علت وجود اصطکاک پس از طی مسافت d متوقف می‌شود و انرژی جنبشی آن به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود یعنی داریم

$$f_kd_1 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 \Rightarrow \mu_km_1gd_1 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2$$

$$d_1 = \frac{v_{1f}^2}{2\mu_kg} = \frac{(1.71)^2}{2(0.5)(9.8)} = 0.298\,m$$

(ب) به طور مشابه برای قطعهٔ ۲ داریم

$$d_2 = \frac{v_{2f}^2}{2\mu_kg} = \frac{(5.71)^2}{2(0.5)(9.8)} = 3.333\,m$$

●●۶۵- در شکل ۹-۶۷، ذرهٔ ۱ با جرم $m_1 = 0.3\,kg$ با تندی ۲/۰m/s روی سطح بدون اصطکاکی در امتداد محور x می‌لغزد. وقتی به $x = 0$ می‌رسد با ذرهٔ ساکن دیگری به جرم ۰/۴۰kg برخورد کشسان یک بعدی می‌کند. سپس وقتی ذرهٔ ۲ در $x_w = 70\,cm$ به دیوار می‌رسد پس از برخورد به آن بدون از دست دادن تندی به عقب برمی‌گردد. در چه مکانی روی محور x، ذرهٔ ۲ با ذرهٔ ۱ برخورد می‌کند؟

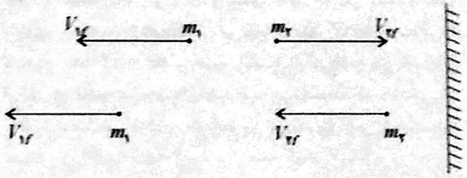
شکل ۹-۶۷ مسئلهٔ ۶۵

حل: برخورد دو گلوله کشسان یک بعدی است لذا می‌توان از معادله‌های ۹-۷۵ و ۹-۷۶ استفاده کرد و چون $v_{2i}=0$ لذا داریم

$$v_{1f}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_{1i}=\frac{0.30\,\text{kg}-0.40\,\text{kg}}{0.30\,\text{kg}+0.40\,\text{kg}}(2.0\,\text{m/s})=-0.29\,\text{m/s}$$

$$v_{2f}=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_{1i}=\frac{2(0.30\,\text{kg})}{(0.30\,\text{kg})+(0.40\,\text{kg})}(2.0\,\text{m/s})=1.71\,\text{m/s}$$

فرض کنیم که t زمان برخورد مجدد دو گلوله باشد. در این زمان گلوله (۱) مسافت x_1 را از نقطهٔ صفر به سمت چپ طی می‌کند



$$x_1=v_{1f}t=0.29t$$

اما گلوله (۲) در همین زمان یک رفت و برگشت (t_2) به نقطهٔ صفر دارد و سپس ادامهٔ حرکت تا به گلولهٔ (۱) برسد

$$t_2=\frac{2x_w}{v_{2f}}=\frac{2(0.7\,\text{m})}{1.71\,\text{m/s}}=0.82\,\text{s}$$

مسافتی که گلولهٔ (۲) از صفر طی می‌کند تا به گلولهٔ (۱) برسد برابر است با

$$x_2=v_{2f}(t-0.82)=1.71(t-0.82)$$

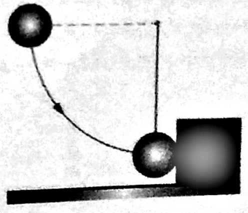
اما وقتی دو گلوله به هم می‌رسند $x_1=x_2$ لذا

$$0.29t=1.71(t-0.82)\Rightarrow t=0.98$$

در نتیجه داریم

$$x_1=(0.29)(0.98)=0.286\,\text{m}$$

۶۶●●- یک گلولهٔ فولادی به جرم $0.500\,\text{kg}$ به انتهای سیمی به طول $70.0\,\text{cm}$ که در انتها ثابت شده بسته شده است. وقتی که سیم در وضعیت افقی است (شکل ۹-۶۸) گلوله رها می‌شود و در پایین‌ترین نقطهٔ مسیرش به یک قطعهٔ فولادی به جرم $2.50\,\text{kg}$ که در حال سکون روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد، برخورد می‌کند. برخورد کشسان است. مطلوب است (الف) تندی گلوله و (ب) تندی قطعه درست پس از برخورد.



شکل ۹-۶۸ مسئلهٔ ۶۶

حل: حرکت از دو قسمت تشکیل شده است. یکی پس از رها شدن گلوله تا پیش از برخورد با قطعه و قسمت دوم یک برخورد کشسان یک بعدی است. برای قسمت اول از پایستگی انرژی استفاده کرده سرعت گلوله را پیش از برخورد به دست می‌آوریم.

$$E_i=E_f\Rightarrow 0+m_1gL=\frac{1}{2}m_1v_1^2+0$$

$$v_1=\sqrt{2gL}=\sqrt{2(9.8\,\text{m/s}^2)(0.7\,\text{m})}=3.7\,\text{m/s}$$

برای قسمت دوم $v_{1i}=v_1=3.7\,\text{m/s}$ و برای برخورد کشسان یک بعدی $(v_{2i}=0)$ داریم

(الف)
$$v_{1f}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_{1i}=\frac{(0.5\,\text{kg})-(2.5\,\text{kg})}{(0.5\,\text{kg})+(2.5\,\text{kg})}(3.7\,\text{m/s})=-2.47\,\text{m/s}$$

علامت منفی بیانگر حرکت رو به عقب گلوله پس از برخورد است.

(ب)
$$v_{2f}=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_{1i}=\frac{2(0.5\,\text{kg})}{(0.5\,\text{kg})+(2.5\,\text{kg})}(3.7\,\text{m/s})=1.23\,\text{m/s}$$

۶۷●●- قطعهٔ ۱ به جرم m_1 در امتداد سطح بدون اصطکاکی می‌لغزد و با قطعهٔ ۲ به جرم $m_2=3m_1$ برخورد کشسان یک بعدی می‌کند. پیش از برخورد، تندی مرکز جرم دستگاه دو-قطعه $3.00\,\text{m/s}$ است. پس از آن تندی (الف) مرکز جرم و (ب) تندی قطعهٔ ۲ چقدر است؟

حل: (الف) چون نیروی خارجی به دستگاه وارد نمی‌شود سرعت مرکز جرم ثابت است.

$$v_{\text{com},f}=v_{\text{com},i}=3\,\text{m/s}$$

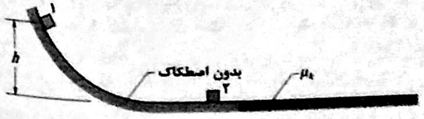
(ب)
$$v_{\text{com},i}=\frac{m_1v_{1i}+m_2v_{2i}}{m_1+m_2}\Rightarrow 3\,\text{m/s}=\frac{m_1v_{1i}}{m_1+3m_1}$$

$$v_{1i}=12\,\text{m/s}$$

و برای برخورد کشسان یک بعدی (وقتی $v_{2i}=0$) داریم

$$v_{2f}=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_{1i}=\frac{2m_1}{m_1+3m_1}(12\,\text{m/s})=6\,\text{m/s}$$

۶۸●●- در شکل ۹-۶۹، قطعهٔ ۱ به جرم m_1 از حالت سکون از ارتفاع $h=2.50\,\text{m}$ در امتداد شیب بدون اصطکاکی سُر می‌خورد و سپس با قطعهٔ ساکن ۲ که جرم آن $m_2=2.00m_1$ است برخورد می‌کند. پس از برخورد، قطعهٔ ۲ به ناحیه‌ای که ضریب اصطکاک جنبشی μ_k آن برابر 0.500 است سُر می‌خورد و پس از طی مسافت d در آن ناحیه، متوقف می‌شود. اگر برخورد (الف) کشسان و (ب) کاملاً ناکشسان باشد، مسافت d چقدر است؟



شکل ۹-۶۹ مسئلهٔ ۶۸

حل: ابتدا سرعت پیش از برخورد قطعهٔ ۱ را با استفاده از پایستگی انرژی به دست می‌آوریم

$$mgh=\frac{1}{2}mv_{1i}^2\Rightarrow v_{1i}=\sqrt{2gh}$$

$$v_{1i}=\sqrt{2gh}=\sqrt{2(9.8\,\text{m/s}^2)(2.5\,\text{m})}=7\,\text{m/s}$$

(الف) اگر برخورد کشسان باشد.

برای برخورد کشسان یک بعدی به ازای $v_{2i}=0$، داریم

$$v_{2f}=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_{1i}=\frac{2m_1}{m_1+2m_1}(7\,\text{m/s})=4.67\,\text{m/s}$$

از قضیه کار- انرژی جنبشی برای قطعهٔ ۲ استفاده می‌کنیم. کار نیروی اصطکاک برابر تغییر انرژی جنبش قطعهٔ ۲ است. در اینجا v_{2f} سرعت اولیه قطعهٔ ۲ برای این قسمت است.

$$-\mu_k m_2 dg=0-\frac{1}{2}m_2v_{2f}^2$$

$$(0.5)(9.8\,\text{m/s}^2)d=\frac{1}{2}(4.67\,\text{m/s})^2\Rightarrow d=2.22\,\text{m}$$

(ب) اگر برخورد کاملاً ناکشسان باشد.

از پایستگی اندازه حرکت خطی داریم

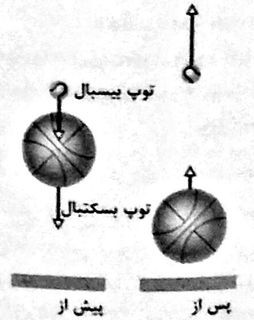
$$m_1v_{1i}=(m_1+m_2)v$$

$$m_1(7\,m/s)=(m_1+2m_1)v\Rightarrow v=2.33\,\text{m/s}$$

مجدداً از قضیهٔ کار- انرژی جنبشی استفاده می‌کنیم. در این حالت v سرعت اولیهٔ قطعهٔ ۲ است.

$$(0.5)(9.8\,\text{m/s}^2)d=\frac{1}{2}(2.33)^2\Rightarrow d=0.55\,\text{m}$$

۶۹●●●- توپ کوچکی به جرم m همردیف و بالای توپ بزرگتر به جرم $M=0.63\,\text{kg}$ قرار دارد (با جدایی اندک، مانند توپ بیسبال و توپ بسکتبال شکل ۹-۷۰ الف) و از ارتفاع $h=1.8\,\text{m}$ با فرض اینکه شعاع هر توپ نسبت به h ناچیز است به طور همزمان رها می‌شوند. (الف) اگر توپ بزرگتر به طور کشسان از کف به سمت بالا و سپس توپ کوچک پس از برخورد کشسان با توپ بزرگتر به سمت بالا برگردد، چه مقدار m باعث می‌شود تا وقتی که توپ بزرگ با توپ کوچک برخورد کرد متوقف شود؟ (ب) در این موقع توپ کوچک به چه ارتفاعی می رسد (شکل ۹-۷۰ ب).



شکل ۹-۷۰ مسئلهٔ ۶۹

حل: ابتدا با استفاده از اصل پایستگی انرژی سرعت توپ‌ها را در مجاورت زمین به دست آوریم

$$E_i=E_f$$

$$mgh=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow v=\sqrt{2gh}\quad\begin{cases}v_{Mi}=\sqrt{2gh}\\ v_{mi}=-\sqrt{2gh}\end{cases}$$

(الف) برای برخورد کشسان یک بعدی داریم

$$v_{Mf}=\frac{M-m}{M+m}v_{Mi}+\frac{2m}{M+m}v_{mi}=\frac{M-m}{M+m}\sqrt{2gh}-\frac{2m}{M+m}\sqrt{2gh}=\frac{M-3m}{M+m}\sqrt{2gh}$$

چون می‌خواهیم پس از برخورد سرعت توپ بزرگتر صفر باشد لذا خواهیم داشت

$$v_{Mf}=0\Rightarrow M=3m\Rightarrow m=\frac{0.63}{3}=0.21\,\text{kg}$$

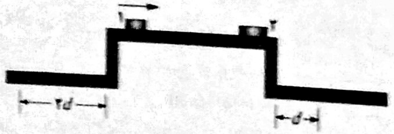
(ب) سرعت توپ کوچکتر نیز پس از برخورد از رابطهٔ زیر به دست می‌آید $(M=3m)$

$$v_{mf}=\frac{2M}{M+m}v_{Mi}+\frac{m-M}{M+m}v_{mi}=\frac{2(3m)}{3m+m}\sqrt{2gh}-\frac{m-3m}{3m+m}\sqrt{2gh}=2\sqrt{2gh}=2\sqrt{2(9.8\,\text{m/s}^2)(1.8\,\text{m})}=11.9\,\text{m/s}$$

از پایستگی انرژی داریم

$$\frac{1}{2}mv_{mf}^2=mgh'\Rightarrow h'=\frac{v_{mf}^2}{2g}=\frac{(11.9\,\text{m/s})^2}{2(9.8\,\text{m/s}^2)}=7.2\,\text{m}$$

۷۰●●●- در شکل ۹-۷۱ قرص ۱ به جرم $m_1=0.20\,\text{kg}$ روی میز بدون اصطکاک آزمایشگاه سر داده می‌شود تا با قرص ساکن ۲ برخورد کشسان یک بعدی کند. سپس قرص ۲ سُر خورده و از میز می‌افتد و در فاصلهٔ d از پایهٔ میز فرود می‌آید. قرص ۱ بر اثر برخورد به عقب برمی‌گردد و در جهت مخالف روی میز سُر می‌خورد و از روی میز پرتاب شده و در فاصلهٔ $2d$ از پایهٔ میز فرود می‌آید. جرم قرص ۲ چقدر است؟ (راهنمایی: به علامتها دقت کنید.)



شکل ۹-۷۱ مسئلهٔ ۷۰

حل: چون برخورد کشسان یک بعدی است و $v_{2i}=0$ است لذا از معادله‌های ۹-۷۵ و ۹-۷۶ داریم

$$v_{1f}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_{1i}\qquad\text{و}\qquad v_{2f}=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_{1i}$$

هر دو قرص در زمان سقوط یکسانی به کف می‌رسند چون ارتفاع سقوط هر دو یکی است، لذا برای قرص ۱ در خلاف جهت محور x داریم

$$-2d = v_{1f}t = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} t$$

برای قرص ۲ در جهت محور x می‌نویسیم

$$d = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} t$$

از تقسیم کردن دو رابطه بر هم خواهیم داشت

$$\frac{-2d}{d} = \frac{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} t}{\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} t} \Rightarrow -2 = \frac{m_1 - m_2}{2m_1}$$

$$-2 = \frac{(0/20\,\text{kg}) - m_2}{2(0/20\,\text{kg})} \Rightarrow m_2 = 1\text{kg}$$

●●۷۱- یک پروتون پرتابه با تندی ۵۰۰m/s با پروتون ساکن هدف دیگری برخورد کشسان می‌کند. دو پروتون سپس در مسیرهای عمود بر هم حرکت می‌کنند در حالی که پرتابه ۶۰° با جهت اولیه‌اش زاویه دارد. پس از برخورد، تندی (الف) پروتون هدف و (ب) پروتون پرتابه، چقدر است؟

حل: (الف) از پایستگی اندازه حرکت در راستای y می‌توان v_{1f} را برحسب v_{2f} به دست آورد.

$$0 = m_1 v_{1f} \sin\theta_1 - m_2 v_{2f} \sin\theta_2$$

چون جرم‌ها برابرند $(m_1 = m_2)$ از طرفین حذف می‌شود.

$$v_{1f} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} v_{2f} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} v_{2f} = \frac{\sqrt{3}}{3} v_{2f}$$

اکنون پایستگی اندازه حرکت در راستای x به کار برده و v_{1f} را نیز در آن جایگزین می‌کنیم در نتیجه می‌توان v_{2f} را به دست آورد.

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2$$

$$500 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} v_{2f}\right) \cos 60^\circ + v_{2f} \cos 30^\circ \Rightarrow v_{2f} = 433\ \text{m/s}$$

(ب)

$$v_{1f} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(433\ \text{m/s}) = 250\ \text{m/s}$$

●●۷۲- دو جسم A و B هر یک به جرم ۲/۰kg، برخورد می‌کنند. سرعتهای قبل از برخورد عبارت‌اند از $\vec{v}_A = (15\hat{i} + 30\hat{j})$m/s و $\vec{v}_B = (-10\hat{i} + 5/0\hat{j})$m/s . پس از برخورد $\vec{v}_A' = (-5/0\hat{i} + 20\hat{j})$m/s . (الف) سرعت نهایی B و (ب) تغییر در انرژی جنبشی (شامل علامت)، چقدر است؟

حل: (الف) از پایستگی اندازه حرکت خطی داریم

$$m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = m_A \vec{v}_A' + m_B \vec{v}_B'$$

با توجه به اینکه جرم‌ها برابرند از طرفین رابطه حذف می‌شوند. در نتیجه می‌توان نوشت

$$\vec{v}_B' = \vec{v}_A + \vec{v}_B - \vec{v}_A'$$
$$= (15\hat{i} + 30\hat{j}) + (-10\hat{i} + 5\hat{j}) - (-5\hat{i} + 20\hat{j}) = 10\hat{i} + 15\hat{j}$$

(ب) انرژی جنبشی اولیهٔ دستگاه برابر است با

$$K_i = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2}(2/0\,\text{kg})[(15)^2 + (30)^2]$$
$$+ \frac{1}{2}(2/0\,\text{kg})[(-10)^2 + (5)^2] = 1/3 \times 10^3\ \text{J}$$

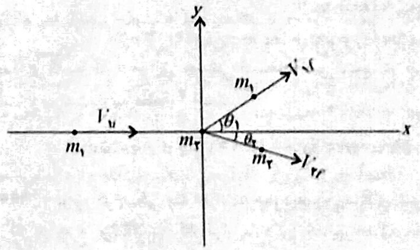
انرژی جنبشی نهایی دستگاه برابر است با

$$K_f = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2 = \frac{1}{2}(2/0\,\text{kg})[(-5)^2 + (20)^2]$$
$$+ \frac{1}{2}(2/0\,\text{kg})[(10)^2 + (15)^2] = 8/0 \times 10^2\ \text{J}$$

تغییر انرژی جنبشی دستگاه برابر است با $\Delta K = -5/0 \times 10^2\ \text{J}$ که علامت منفی بیانگر از دست رفتن انرژی جنبشی اولیه است.

●●۷۳- در شکل ۹-۲۳ ذرهٔ پرتابهٔ ۱ ذرهٔ آلفا و ذرهٔ هدف ۲ هستهٔ اکسیژن است. ذرهٔ آلفا با زاویهٔ $\theta_1 = 64/0^\circ$ پراکنده و هستهٔ اکسیژن با تندی $1/20 \times 10^5$ m/s و با زاویهٔ $\theta_2 = 51/0^\circ$ پس زده می‌شود. برحسب یکاهای جرم اتمی، جرم ذرهٔ آلفا برابر $4/00u$ و جرم هستهٔ اکسیژن $16/0u$ است. (الف) تندی نهایی و (ب) تندی اولیهٔ ذرهٔ آلفا چقدر است؟ ILW

حل:



(الف) از پایستگی اندازه حرکت خطی در راستای محور y داریم

$$0 = m_1 v_{1f} \sin\theta_1 - m_2 v_{2f} \sin\theta_2$$

$$v_{1f} = \frac{m_2 v_{2f} \sin\theta_2}{m_1 \sin\theta_1} = \frac{(16u)(2 \times 10^5\ \text{m/s})\sin(51^\circ)}{(4u)\sin(64^\circ)}$$
$$= 4/15 \times 10^5\ \text{m/s}$$

(ب) از پایستگی اندازه حرکت خطی در راستای محور x داریم

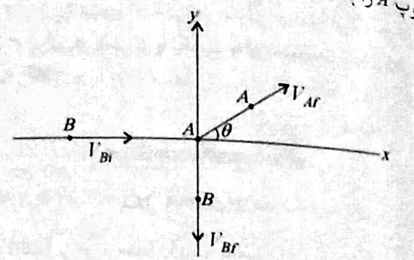
$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2$$

$$(4u)\, v_{1i} = (4u)(4/15 \times 10^5\ \text{m/s})\cos(64^\circ)$$
$$+ (16u)(1/2 \times 10^5\ \text{m/s})\cos(51^\circ)$$

$$v_{1i} = 4/84 \times 10^5\ \text{m/s}$$

●●۷۴- توپ B که با تندی v در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند با توپ ساکن A واقع در مبدأ برخورد می‌کند. A و B جرمهای متفاوتی دارند. پس از برخورد، توپ B با تندی $v/2$ در جهت منفی محور y حرکت می‌کند. (الف) توپ A در چه جهتی حرکت می‌کند؟ (ب) نشان دهید که با اطلاعات داده شده نمی‌توان تندی A را به دست آورد.

حل: (الف) فرض می‌کنیم توپ A مطابق شکل منحرف شود. آنگاه از پایستگی اندازه حرکت استفاده کرده زاویهٔ انحراف θ توپ A را به دست می‌آوریم



$$m_B v_{Bi} \hat{i} = m_A \vec{v}_{Af} + m_B v_{Bf}(-\hat{j})$$

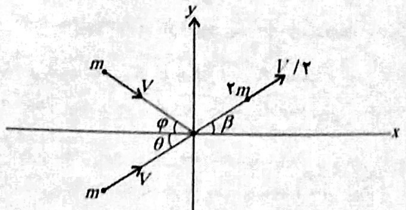
$$m_A \vec{v}_{Af} = m_B v \hat{i} + m_B \frac{v}{2} \hat{j} \Rightarrow \vec{v}_{Af} = \frac{m_B}{m_A} v \left(\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j}\right)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26/57^\circ$$

(ب) چون در رابطهٔ $\vec{v}_{Af}$ تعداد مجهول‌ها زیاد است نمی‌توان آن را محاسبه کرد.

●●●۷۵- دو جسم با جرمها و تندیهای اولیهٔ یکسان پس از برخورد کاملاً ناکشسان با نصف تندی اولیهٔ خود حرکت می‌کنند. زاویهٔ بین سرعتهای اولیهٔ دو جسم را پیدا کنید.

حل:



از پایستگی اندازه حرکت خطی در راستای محورهای x و y داریم

$$mv\cos\phi + mv\cos\theta = 2m(v/2)\cos\beta$$
$$-mv\sin\phi + mv\sin\theta = 2m(v/2)\sin\beta$$

لذا خواهیم داشت

$$\cos\phi + \cos\theta = \cos\beta$$
$$-\sin\phi + \sin\theta = \sin\beta$$

طرفین رابطه‌ها به توان ۲ رسانیده و سپس جمع می‌کنیم، با استفاده از اتحادهای مثلثاتی خواهیم داشت

$$2 + 2\cos(\phi + \theta) = 1 \Rightarrow \cos(\phi + \theta) = -\frac{1}{2}$$

یعنی $\phi + \theta = 120^\circ$ است.

●۷۶- موشکی را در نظر بگیرید که در عمق فضا نسبت به چارچوب مرجع لخت ساکن است. موتور موشک برای یک بازهٔ معین روشن می‌شود. اگر تندی اولیهٔ موشک نسبت به چارچوب لخت برابر با (الف) تندی گازهای خروجی (تندی محصولهای خروجی نسبت به موشک) و (ب) دو برابر تندی گازهای خروجی باشد، نسبت جرم موشک (نسبت جرم اولیه به نهایی) در آن بازهٔ زمانی چقدر است؟

حل: از معادله ۹-۸۸ داریم $v_f - v_i = v_{rel} \ln\frac{M_i}{M_f}$ که در اینجا $v_i = 0$ ، $v_f = v$ و $v_{rel} = u$ را در نظر بگیریم خواهیم داشت

$$v = u \ln\frac{M_i}{M_f} \Rightarrow \frac{M_i}{M_f} = e^{v/u}$$

(الف) در حالت $v = u$ نتیجه زیر به دست می‌آید

$$\frac{M_i}{M_f} = e^1 = 2/72$$

(ب) در حالت $v = 2u$ داریم

$$\frac{M_i}{M_f} = e^2 = 7/39$$

●۷۷- موشکی که در عمق فضا و در آغاز نسبت به چارچوب مرجع لخت ساکن است دارای جرم $2/55 \times 10^5$ kg است که $1/81 \times 10^5$ kg از آن جرم سوخت است. موتور موشک به مدت ۲۵۰s روشن می‌شود و با آهنگ ۴۸۰kg/s سوخت مصرف می‌شود. تندی گازهای خروجی نسبت به موشک برابر ۳/۲۷km/s است. (الف) نیروی پیشران موشک چقدر است؟ ۲۵۰s پس از روشن شدن موتور، (ب) جرم و (پ) تندی موشک چقدر است؟ SSM ILW

حل: (الف) نیروی پیشران موتور برابر است با

$$T = v_{rel}\frac{dm}{dt} = (3/27 \times 10^3\ \text{m/s})(480\ \text{kg/s}) = 1/57 \times 10^6\ \text{N}$$

(ب) جرم سوخت خارج شده برابر است با

$$M_{\text{سوخت}} = \frac{dm}{dt}\Delta t = (480\ \text{kg/s})(250\ \text{s}) = 1/20 \times 10^5\ \text{kg}$$

و جرم موشک پس از سوخت خارج برابر است با

$$M_f = M_i - M_{\text{سوخت}} = (2/55 \times 10^5\ \text{kg}) - (1/20 \times 10^5\ \text{kg})$$
$$= 1/35 \times 10^5\ \text{kg}$$

(پ)

$$v_f - v_i = v_{rel} \ln\frac{M_i}{M_f}$$

$$\Rightarrow v_f - 0 = (3/27 \times 10^3\ \text{m/s}) \ln\left(\frac{2/55 \times 10^5\ \text{kg}}{1/35 \times 10^5\ \text{kg}}\right)$$

$$v_f = 2/08 \times 10^3\ \text{m/s}$$

●۷۸- یک سفینهٔ کاوشگر فضایی به جرم ۶۰۹۰kg، که با تندی ۱۰۵m/s نسبت به خورشید به طرف مشتری حرکت می‌کند، موتور موشکش را روشن می‌کند و ۸۰/۰kg گازهای خروجی را با تندی ۲۵۳m/s نسبت به سفینهٔ کاوشگر بیرون می‌دهد. سرعت نهایی موشک چقدر است؟

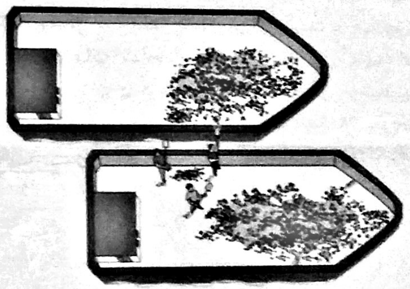
حل: با چشمپوشی از نیروی گرانشی مشتری و به کار بردن معادله ۹-۸۸ داریم

$$v_f - v_i = v_{\text{rel}} \ln \frac{M_i}{M_f}$$

$$\Rightarrow v_f - ۱۰۵\,\text{m/s} = ۲۵۳\,\text{m/s} \ln\left(\frac{۶۰۹۰}{۶۰۹۰-۸۰}\right)$$

$$v = ۱۰۸/۳۵\,\text{m/s}$$

۷۹●- در شکل ۹-۷۲، دو کرجی دراز در آب آرام و در یک جهت یکی با تندی $۱۰\,\text{km/h}$ و دیگری با تندی $۲۰\,\text{km/s}$ حرکت می‌کنند. وقتی دو کرجی از کنار هم عبور می‌کنند، زغال سنگ با آهنگ $۱۰۰۰\,\text{kg/min}$ بابیل از کرجی با تندی آهسته‌تر به کرجی با تندی سریعتر، ریخته می‌شود. چه مقدار نیروی اضافی باید به وسیلهٔ موتور هر کرجی تأمین کنیم تا تندی (الف) کرجی سریعتر و (ب) کرجی آهسته‌تر تغییر نکند؟ فرض کنید ریختن زغال سنگ همواره از پهلو صورت می‌گیرد و نیروهای اصطکاکی بین کرجیها و آب به وزن آنها بستگی ندارد.
SSM



شکل ۹-۷۲ مسئلهٔ ۷۹

حل: ابتدا تندی کرج‌ها را برحسب متر بر ثانیه حساب می‌کنیم

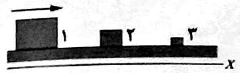
$v_۱ = ۲۰\,\text{km/h} = ۵/۵۶\,\text{m/s}$ و $v_۲ = ۱۰\,\text{km/h} = ۲/۷۸\,\text{m/s}$

(الف) آهنگ تغییر زغال سنگ برابر نیروی وارد شده توسط کرجی سریعتر است

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m}{\Delta t}\Delta v = \left(\frac{۱۰۰۰\,\text{kg}}{۶۰\,\text{s}}\right)(۵/۵۶\,\text{m/s} - ۲/۷۸\,\text{m/s})$$
$$= ۴۶/۳۳\,\text{N}$$

(ب) طبق فرض مسئله اصطکاک بین کرجی‌ها و آب به وزن آنها بستگی ندارد در نتیجه کاهش جرم کرجی آهسته‌تر اثری روی تندی آن ندارد.

۸۰- **تقویت کنندهٔ تندی.** در شکل ۹-۷۳، قطعهٔ ۱ به جرم $m_۱$ با تندی $v_{۱i} = ۴/۰۰\,\text{m/s}$ روی سطح بدون اصطکاکی در امتداد محور x سر می‌خورد. سپس با قطعهٔ ۲ به جرم $m_۲ = ۰/۵۰۰ m_۱$ که ساکن است برخورد کشسان یک بعدی می‌کند. پس از آن، قطعهٔ ۲ با قطعهٔ ۳ به جرم $m_۳ = ۰/۵۰۰ m_۲$ که ساکن است برخورد کشسان یک بعدی می‌کند. (الف) تندی قطعه ۳ چقدر است؟ آیا (پ) تندی، (ت) انرژی جنبشی و (ث) اندازه حرکت قطعهٔ ۳ بزرگتر از کمتر از یا یکسان با این مقادرها برای قطعهٔ ۱ است؟ [redacted]



شکل ۹-۷۳ مسئلهٔ ۸۰

حل: (الف) برخورد قطعهٔ (۱) به قطعهٔ (۲) برخورد کشسان یک بعدی است. ابتدا این برخورد را بررسی می‌کنیم. در این برخورد $v_{۲i} = ۰$ و از معادلهٔ ۹-۷۶ یا معادلهٔ ۹-۶۸ داریم

$$v_{۲f} = \frac{۲m_۱}{m_۱ + m_۲} v_{۱i} = \frac{۲m_۱}{۱/۵m_۱}(۴/۰۰\,\text{m/s}) = ۵/۳۳\,\text{m/s}$$

سپس $v_{۲f}$ خود سرعت اولیهٔ $(v_{۲i} = v_{۲f})$ قطعهٔ (۲) در برخورد کشسان یک بعدی با قطعهٔ (۳) است و به ازای $v_{۳i} = ۰$، خواهیم داشت

$$v_{۳f} = \frac{۲m_۲}{m_۲ + m_۳} v_{۲i} = \frac{۲m_۲}{۱/۵m_۲}(۵/۳۳\,\text{m/s}) = ۷/۱۱\,\text{m/s}$$

(ب)
$$\frac{v_{۳f}}{v_{۱i}} = \frac{۷/۱۱}{۴/۰۰} = ۱/۷۸$$

مشاهده می‌شود که سرعت تقویت شده است.

(پ)
$$K_{۱i} = \frac{۱}{۲}m_۱ v_{۱i}^۲ = \frac{۱}{۲}m_۱(۴/۰۰)^۲ = ۸m_۱$$

$$K_{۳f} = \frac{۱}{۲}m_۳ v_{۳f}^۲ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۴}m_۱\right)(۷/۱۱)^۲ = ۶/۳۲m_۱$$

مشاهده می‌شود که $K_{۳f}$ کوچکتر از $K_{۱i}$ است و این نتیجه دور از انتظار نیست چون انرژی جنبشی اولیه بین سه قطعه تقسیم شده است.

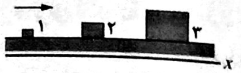
(ت)
$$P_{۱i} = m_۱ v_{۱i} = ۴m_۱$$

$$P_{۳f} = m_۳ v_{۳f} = \frac{۱}{۴}m_۱(۷/۱۱) = ۱/۷۸m_۱$$

مشاهده می‌شود که اندازه حرکت نیز به دلیل ذکر شده کاهش یافته است.

۸۱- **تضعیف کنندهٔ تندی.** در شکل ۹-۷۴، قطعهٔ ۱ به جرم $m_۱$ با تندی $۰/۴۰۰\,\text{m/s}$ در امتداد محور x روی سطح بدون اصطکاکی می‌لغزد. سپس، با قطعهٔ ۲ به جرم $m_۲ = ۲/۰۰m_۱$ که ساکن است برخورد کشسان یک بعدی می‌کند. پس از آن، قطعهٔ ۲ با قطعهٔ ۳ به جرم $m_۳ = ۲/۰۰m_۲$ که ساکن است برخورد کشسان یک بعدی می‌کند. (الف) تندی قطعهٔ ۳ چقدر است؟ آیا، (ب) تندی، (پ) انرژی جنبشی و (ت) اندازه حرکت قطعهٔ ۳، بزرگتر است یا کوچکتر یا با مقدارهای اولیهٔ ۱ یکسان است؟

[redacted]



شکل ۹-۷۴ مسئلهٔ ۸۱

حل: (الف) برخوردها یک بعدی و کشسان هستند و چون هدف (ابتدا قطعهٔ (۲) و سپس قطعهٔ (۳)) در هر دو برخورد ساکن است لذا می‌توان نوشت

$$v_{۲f} = \frac{۲m_۱}{m_۱ + m_۲} v_{۱i} = \frac{۲m_۱}{۳m_۱}(۴/۰۰\,\text{m/s}) = ۲/۶۷\,\text{m/s}$$

سپس $v_{۲f}$ خود سرعت اولیهٔ قطعهٔ ۲ $(v_{۲i} = v_{۲f})$ در برخورد با قطعهٔ ۳ است و با توجه به ساکن بودن این قطعه خواهیم داشت

$$v_{۳f} = \frac{۲m_۲}{m_۲ + m_۳} v_{۲i} = \frac{۲m_۲}{۳m_۲}(۲/۶۷\,\text{m/s}) = ۱/۷۸\,\text{m/s}$$

(ب) از مقایسه مشاهده می‌کنیم که $v_{۳f}$ کوچکتر از $v_{۱i}$ است یعنی سرعت تضعیف شده است.

(پ)
$$K_۱ = \frac{۱}{۲}m_۱ v_{۱i}^۲ = \frac{۱}{۲}m_۱(۴/۰۰\,\text{m/s})^۲ = ۸m_۱$$

$$K_۳ = \frac{۱}{۲}m_۳ v_{۳i}^۲ = \frac{۱}{۲}(۴m_۱)(۱/۷۸\,\text{m/s})^۲ = ۶/۳۴\,\text{m}$$

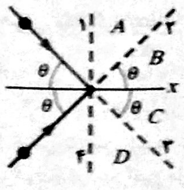
در می‌یابیم که انرژی جنبشی کاهش یافته است.

(ت)
$$P_۱ = m_۱ v_{۱i} = ۴m_۱$$

$$P_۳ = m_۳ v_{۳f} = ۴m_۱(۱/۷۸\,\text{m/s}) = ۷/۲۱m_۱$$

از مقایسه مشاهده می‌شود که اندازه حرکت افزایش یافته است.

۸۲- شکل ۹-۷۵ دید از بالای دو ذره را که با سرعت ثابت روی سطح بدون اصطکاکی می‌لغزند نشان می‌دهد. ذره‌ها دارای جرم یکسان و سرعت یکسان $v = ۴/۰۰\,\text{m/s}$ هستند و در محل تقاطع مسیرشان، برخورد می‌کنند. محور x نیمساز زاویهٔ بین مسیرهای وارده است به طوری که $\theta = ۴۰/۰°$ است. ناحیهٔ سمت راست برخورد توسط محور x و چهار خط چین شماره دار به چهار ناحیهٔ تقسیم شده که با حرفها مشخص شده‌اند. اگر برخورد (الف) کاملاً ناکشسان، (ب) کشسان و (پ) ناکشسان باشد، ذره‌ها در چه ناحیه‌ای یا امتداد چه خطی حرکت می‌کنند؟ اگر برخورد (ت) کاملاً ناکشسان و (ث) کشسان باشد تندی نهایی آنها چقدر است؟



شکل ۹-۷۵ مسئلهٔ ۸۲

حل: (الف) برای برخورد کاملاً ناکشسان دو ذره به هم چسبیده و با یک تندی حرکت می‌کنند

$$(mv\cos\theta\,\hat{i} - mv\sin\theta\,\hat{j}) + (mv\cos\theta\,\hat{i} + mv\sin\theta\,\hat{j}) = ۲m\vec{V}$$

$$\vec{V} = v\cos\theta\,\hat{i}$$

یعنی حرکت پس از برخورد در جهت محور x است.

(ب) اگر برخورد کشسان باشد چون ذرات یکسان هستند تندی‌های نهایی آنها با تندی‌های اولیهٔ آنها برابر است و از پایستکی اندازه حرکت خطی مشاهده می‌کنیم زاویهٔ برخورد با زاویهٔ پراکندگی برابر است و یک ذره در امتداد خط‌چین ۲ و ذره دیگر در امتداد خط‌چین ۳ به حرکت ادامه می‌دهند.

(پ) اگر برخورد ناکشسان باشد مقداری انرژی پس از برخورد هدر رفته است. یعنی تندی ذرات V پس از برخورد کمتر خواهد بود. زاویه پراکندگی را α بنامیم آنگاه $\alpha < \theta$ است چون از رابطهٔ اندازه حرکت در راستای محور x داریم

$$۲mv\cos\theta = ۲mV\cos\alpha$$

$$\Rightarrow v\cos\theta = V\cos\alpha$$

چون $V < v$ است پس با $\alpha < \theta$ باشد.

(ت) از قسمت (الف) برای برخورد کاملاً ناکشسان دیدیم که

$$V = v\cos\theta = (۴/۰\,\text{m/s})\cos ۴۰° = ۳/۰۶\,\text{m/s}$$

(ث) در قسمت (ب) دیدیم که ذره‌ها با همان تندی و در همان راستا حرکت می‌کنند و جای آنها عوض می‌شود، یعنی

$$v_{۱f} = v_{۲f} = ۴/۰\,\text{m/s}$$

۸۳- *نسبی، واژهٔ مهمی است.* در شکل ۹-۷۶. قطعهٔ L به جرم $m_L = ۱/۰۰\,\text{kg}$ و قطعهٔ R به جرم $m_R = ۰/۵۰۰\,\text{kg}$ در وضعیتی که بین آنها یک فنر فشرده وجود دارد نگهداشته شده‌اند. وقتی قطعه‌ها رها شوند، فنر آنها را وادار به سرخوردن روی یک کف بدون اصطکاک می‌کند. (جرم فنر قابل چشمپوشی است و پس از رها کردن قطعه‌ها روی کف می‌افتد.) (الف) اگر فنر به قطعهٔ L رها شده تندی $۱/۲\,\text{m/s}$ را نسبت به کف بدهد، قطعهٔ R در $۰/۸۰۰\,\text{s}$ بعدی چه مسافتی را طی می‌کند؟ (ب) اگر به جای آن، فنر به قطعهٔ L تندی $۱/۲\,\text{m/s}$ را نسبت به سرعتی که فنر به قطعهٔ R می‌دهد بدهد، قطعهٔ R در $۰/۸۰۰\,\text{s}$ بعدی چه مسافتی را طی می‌کند؟

شکل ۹-۷۶ مسئلهٔ ۸۳

حل: (الف) از پایستگی اندازه حرکت خطی داریم

$$۰ = P_L + P_R$$

$$۰ = m_L v_L + m_R v_R \Rightarrow v_R = -\frac{m_L v_L}{m_R}$$

$$v_R = -\frac{(۱/۰۰\,\text{kg})(۱/۲\,\text{m/s})}{(۰/۵۰\,\text{kg})} = ۲/۴۰\,\text{m/s}$$

$$d_R = v_R t = (۲/۴۰\,\text{m/s})(۰/۸۰\,\text{s}) = ۱/۹۲\,\text{m}$$

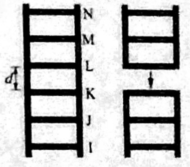
(ب) تندی قطعهٔ L نسبت به زمین برابر است با $v_L = ۱/۲ - v_R$ و از پایستگی اندازه حرکت خطی داریم

$$0 = m_R v_R + m_L v_L \Rightarrow 0 = m_R v_R + m_L(1/2 - v_R)$$
$$v_R = 0/80\,\text{m/s}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$d_A = v_R t = (0/80\,\text{m/s})(0/80\,\text{s}) = 0/64\,\text{m}$$

۸۴- *فروریزش عمودی یک ساختمان بلند*. در بخشی از یک ساختمان بلند که در شکل ۹-۷۷ الف نشان داده شده است، زیر بنای هر طبقهٔ معین K باید وزن W طبقه‌های بالاتر را تحمل کند. معمولاً این زیر بنا با ضریب ایمنی s ساخته می‌شود به طوری که هر طبقه حتی وزن بیش از sW را نیز می‌تواند تحمل کند. ولی اگر ستونهای نگهدارندهٔ بین K و L به طور ناگهانی فرو ریزد و طبقه‌های بالاتر با سقوط آزاد روی طبقهٔ K فرود آیند (شکل ۹-۷۷ ب) نیروی حاصل از این برخورد می‌تواند از sW بیشتر شده و پس از لحظهٔ کوتاهی باعث شود که K روی طبقهٔ J فرود آید که این طبقه نیز روی طبقهٔ I فرود می‌آید و همین‌طور تا پایین ساختمان ادامه می‌یابد. فرض کنید که فاصلهٔ بین طبقه‌ها برابر $d = 4/0\,\text{m}$ و دارای جرمهای یکسان باشند. همچنین فرض کنید وقتی که طبقه‌های بالای K به طور آزاد روی K سقوط می‌کنند برخورد به مدت ۱/۵ms طول بکشد. در این شرایط ساده شده، ضریب ایمنی s چقدر باید افزایش یابد تا از فروریزش عمودی ساختمان جلوگیری شود؟



شکل ۹-۷۷ مسئلهٔ ۸۴

طبقه‌های بالا، در هنگام سقوط اندازه حرکت پیدا می‌کنند و در اثر برخورد، به طبقهٔ پایین خود نیرو وارد میکند.

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

برای آنکه ساختمان فرو نریزد باید داشته باشیم:

$$sW = \frac{\Delta P}{\Delta t} + W$$

اندازه حرکت را می‌یابیم:

$$P = mv = \frac{W}{g}v$$

$$v = gt_1$$

t_1 زمان سقوط است.

$$P = Wt_1$$

$$d = \frac{1}{2}dt_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2d}{g}}$$

$$P = W\sqrt{\frac{2d}{g}} = W\sqrt{\frac{2+4}{9/8}} = 0/9W$$

جایگذاری می‌کنیم:

$$\Rightarrow sW = \frac{0/9W}{1/5} + W = 1/6W \Rightarrow s = 1/6$$

۸۵- یک واگن راه‌آهن با تندی ثابت ۳/۲۰m/s در حال حرکت از زیر یک مخزن غله است. غله با آهنگ ۵۴۰kg/min به داخل آن می‌ریزد. برای اینکه تندی واگن راه آهن ثابت باشد، در نبود اصطکاک چه نیرویی باید به واگن وارد شود؟

حل: در اینجا تغییر جرم داریم و از قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت

$$\vec{F}_{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}}\frac{dm}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

چون سرعت ثابت است لذا $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ در نتیجه داریم

$$\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{v}_{\text{rel}}\frac{dm}{dt}$$

اما غلبه‌ها و مخزن با سرعت واگن v ولی در خلاف جهت حرکت می‌کند یعنی $\vec{v} = -\vec{v}_{\text{rel}}$ ، لذا F_{ext} نیرویی که از تغییر جرم حاصل می‌شود برابر است با

$$F_{\text{ext}} = v\frac{dm}{dt} = (3/20\,\text{m/s})\left(\frac{540\,\text{kg}}{60\,\text{g}}\right) = 28/8\,\text{N}$$

۸۶- *نوعی دایناسور گوشت خوار* از روی تجربه فهمیده بود که به خاطر خطر سکندری خوردن، به ویژه نباید تند بدود زیرا در این صورت دستهای کوچکش نمی‌توانند جلوی افتادن او را بگیرند. فرض کنید که این دایناسور به جرم m در موقع راه رفتن با گامهای بلند و سریع سرنگون می‌شود و مرکز جرم او آزادانه به اندازهٔ ۱/۵ m سقوط می‌کند. پس از آن به خاطر فشردگی بدنش به زمین ۰/۳۰m دیگر پایین می‌آید. (الف) بزرگی تقریبی نیروی قائم متوسط وارد بر دایناسور در حین برخورد با زمین (در طی ۰/۳۰m پایین آمدن) بر حسب مضربی از وزن دایناسور، چقدر است؟ اکنون فرض کنید دایناسور که با تندی۱۹m/s (تند) می‌دود، سر می‌خورد، به زمین می‌افتد و سپس با ضریب اصطکاک جنبشی ۰/۶ می‌لغزد تا متوقف شود. همچنین فرض کنید که نیروی قائم متوسط در حین برخورد به زمین و سر خوردن همان مقدار فرض (الف) باشد. به طور تقریب، (ب) بزرگی میانگین نیروی کلی روی دایناسور از طرف زمین (باز به صورت مضربی از وزن آن) و (پ) مسافت سر خوردن، چقدر است؟ بزرگیهای نیروهای (الف) و (ب) قویاً بیان می‌کنند که برخورد بدن دایناسور را مجروح می‌کند. سر که بیشتر سقوط می‌کند حتی باید صدمهٔ بیشتری ببیند.

حل: (الف) سرعت دایناسور را در لحظهٔ برخورد با زمین می‌توان از پایستگی انرژی مکانیکی استفاده کرد

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$
$$= \sqrt{2(9/8)(1/5)} = 5/4\,\text{m/s}$$

بدن دایناسور پس از تماس با زمین فشرده شده و با یک شتاب کندشونده متوقف می‌شود و در این حین مرکز جرم دایناسور به اندازهٔ $\Delta y = 0/30\,\text{m}$ به سمت پایین جابه‌جا می‌شود. شتاب این حرکت از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta y \Rightarrow 0 - (5/4\,\text{m/s})^2 = 2a(0/30\,\text{m})$$

$$a = -49\,\text{m/s}^2$$

نیروی عمودی وارد بر دایناسور به سمت بالا و برابر با

$$F = ma = 49\,\text{m} = 5\,mg$$

(ب) دو نیرو از طرف زمین بر دایناسور وارد می‌شود یکی نیروی عکس‌العمل عمود بر سطح و دیگری نیروی اصطکاک است که به ترتیب از روابط زیر به دست می‌آوریم

$$N - mg = ma = 5mg \Rightarrow N = 6\,\text{mg}$$

و

$$f_k = \mu_k N = (0/6)(6\,\text{mg}) = 3/6\,\text{mg}$$

این دو نیرو بر هم عمودند و برآیند آنها برابر است با

$$F = \sqrt{N^2 + f_k^2} = \sqrt{(6\,\text{mg})^2 + (3/6\,\text{mg})^2} = 7\,\text{mg}$$

(پ) با استفاده از قضیه کار- انرژی جنبشی می‌توان مسافت سُر خوردن دایناسور را به دست آورد

$$W_{f_k} = K_f - K_i \Rightarrow -f_k d = 0 - \frac{1}{2}mv^2$$

$$d = \frac{mv^2}{2\mu_k(6\,\text{mg})} = \frac{(19)^2}{2(0/6)(6)(9/8)} = 5/1\,\text{m}$$

۸۷- مردی (به وزن ۹۱۵N) روی واگن مسطح و دراز راه آهن (به وزن ۲۴۱۵ N) ایستاده است و واگن با تندی ۱۸/۲m/s در امتداد مثبت محور x حرکت می‌کند، اصطکاک واگن قابل چشمپوشی است. سپس مرد با تندی ۴/۰۰m/s نسبت به واگن در امتداد منفی محور x شروع به دویدن می‌کند. افزایش حاصل در تندی واگن چقدر است؟

حل: چون در راستای افق نیروی خارجی بر دستگاه واگن- شخص وارد نمی‌شود لذا سرعت مرکز جرم ثابت می‌ماند. چنانچه سرعت اولیهٔ واگن را v_0 فرض کنیم، آنگاه $v_{\text{com}} = v_0$ است و داریم

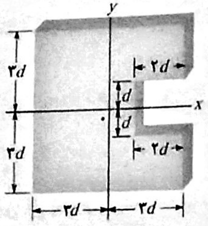
$$v_{\text{com}} = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

m_1 جرم مرد، v_1 سرعت مرد نسبت به زمین و m_2 جرم واگن و v_2 سرعت واگن نسبت به زمین پس از دویدن مرد است. تغییر در تندی واگن برابر $\Delta v = v_2 - v_0$ است که برای به دست آوردن آن باید با کمک رابطهٔ سرعت نسبی v_1 را برحسب v_2 جایگزین کرد که برابر است با $v_1 = v_2 - 4$ در نتیجه داریم

$$v_0 = \frac{m_1(v_2 - 4) + m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 + m_2)v_2 - 4m_1}{m_1 + m_2} = v_2 - \frac{4m_1}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta v = v_2 - v_0 = \frac{4m_1}{m_1 + m_2} = \frac{4w_1}{w_1 + w_2} = \frac{4(915\,\text{N})}{(915\,\text{N}) + (2415\,\text{N})}$$
$$= 1/10\,\text{m/s}$$

۸۸- شکل ۹-۷۸، یک ورقهٔ مربع شکل یکنواخت را به اضلاع $6d = 6/0\,\text{m}$ نشان می‌دهد که یک تکهٔ مربع شکل به اضلاع $2d$ از آن بریده شده است. (الف) مختصهٔ x و (ب) مختصهٔ y مرکز جرم تکهٔ باقیمانده چقدر است؟



شکل ۹-۷۸ مسئلهٔ ۸۸

حل: در این مسئله می‌توان فرض کرد که مربع کل از یک مربع ناقص و یک مربع تکمیل کننده تشکیل شده است. با توجه به تقارن نسبت به محور x نتیجه می‌گیریم که مرکز جرم روی محور x قرار دارد و $y_{\text{com}} = 0$ است.

$$Mx = m_1x_1 + m_2x_2$$

که $x_1 = x_{\text{com}}$ مختصه x مرکز جرم مربع ناقص است. x مختصه x مرکز جرم مربع کامل و x_2 مختصه x مرکز جرم مربع تکمیل کننده است. با انتخاب مبدأ در مرکز مربع کامل خواهیم داشت

$$0 = \sigma(36d^2 - 4d^2)x_{\text{com}} + \sigma(4d^2)(2d)$$
$$\Rightarrow x_{\text{com}} = -\frac{d}{4} = -0/25\,\text{m}$$

۸۹- آخرین مرحلهٔ یک موشک که با تندی ۷۶۰۰m/s حرکت می‌کند شامل دو قسمت است که به هم قلاب شده‌اند، یعنی، محفظهٔ موشک با جرم ۲۹۰/۰kg و مخزن بار با جرم ۱۵۰/۰kg. وقتی قلاب باز شود یک فنر فشرده باعث می‌شود که دو قسمت با تندی نسبی ۹۱۰/۰m/s از هم جدا شوند. تندی (الف) محفظهٔ موشک و (ب) مخزن بار، پس از جداشدن چقدر است؟ فرض کنید که همهٔ سرعتها در یک امتداد قرار دارند. انرژی جنبشی کل را (پ) پیش و (ت) پس از جداشدن به دست آورید. (ث) اختلاف را شرح دهید.

حل: چون نیروی فنر یک نیروی داخلی است لذا اصل پایستگی اندازه حرکت برقرار است.

$$P_i = P_f$$

که m_1 جرم محفظهٔ موشک، m_2 جرم مخزن بار، v_{1f} و v_{2f} به ترتیب سرعت آنها نسبت به زمین پس از باز شدن قلاب و v سرعت ابتدایی موشک است. در (الف) در مسئله سرعت m_2 نسبت به $m_1(v_{\text{rel}})$ داده شده است که با استفاده از رابطهٔ سرعت نسبی، v_{2f} را برحسب v_{1f} می‌نویسیم $v_{2f} = v_{\text{rel}} + v_{1f}$ و سپس آن را در رابطه بالا جایگزین کرده و با قرار دادن داده‌های مسئله یا v_{1f} به دست می‌آید.

$$(m_1 + m_2)v = m_1v_{1f} + m_2(v_{\text{rel}} + v_{1f})$$

$$v_{1f} = \frac{(m_1 + m_2)v - m_2v_{\text{rel}}}{m_1 + m_2} = v - \frac{m_2}{m_1 + m_2}v_{\text{rel}}$$
$$= (7600\,\text{m/s}) - \frac{(150\,\text{kg})}{(920\,\text{kg}) + (150\,\text{kg})}(910\,\text{m/s})$$
$$= 7290\,\text{m/s}$$

(ب) اکنون سرعت مخزن بار از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$v_{۲f} = v_{rel} + v_۱ = (۹۱۰ m/s) + (۷۲۹۰) = ۸۲۰۰ m/s$

(پ) انرژی جنبشی اولیه کل برابر است با

$K_i = \frac{۱}{۲}(m_۱ + m_۲)v^۲ = \frac{۱}{۲}(۲۹۰+۱۵۰)(۷۶۰۰)^۲ = ۱/۲۷۱\times ۱۰^{۱۰} J$

(ت) انرژی جنبشی کل پس از باز شدن قلاب برابر است با

$K_f = \frac{۱}{۲}m_۱v_{۱f}^۲ + \frac{۱}{۲}m_۲v_{۲f}^۲ = \frac{۱}{۲}(۲۹۰)(۷۲۹۰)^۲ + \frac{۱}{۲}(۱۵۰)(۸۲۰۰)^۲ = ۱/۲۷۵\times ۱۰^{۱۰} J$

(ث) انرژی جنبشی کل کمی افزایش یافته است که ناشی از انرژی ذخیره شده در فنر است.

۹۰- جسمی توسط ایستگاه رادار ردیابی و مشخص می‌شود که دارای بردار مکان، $\vec{r} = (۳۵۰۰ - ۱۶۰t)\hat{i} + ۲۷۰۰\hat{j} + ۳۰۰\hat{k}$ است که در آن $\vec{r}$ برحسب متر و t بر حسب ثانیه است. محور x ایستگاه رادار به طرف مشرق، y آن به طرف شمال، و z آن قائم و به طرف بالاست. اگر جسم یک موشک هواشناسی به جرم ۲۵۰kg باشد، (الف) اندازه حرکت خطی، (ب) جهت حرکت و (پ) نیروی خالص وارد بر آن چیست؟

حل: (الف) ابتدا باید سرعت را به دست آورد که داریم

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}[(۳۵۰۰ - ۱۶۰t)\hat{i} + ۲۷۰۰\hat{j} + ۳۰۰\hat{k}]$
$= (۱۶۰ m/s)(-\hat{i})$

در نتیجه اندازه حرکت خطی برابر است با

$\vec{P} = m\vec{v} = (۲۵۰ kg)(-۱۶۰\hat{i} m/s) = (۴\times ۱۰^۴ kgm/s)(-\hat{i})$

(ب) علامت منفی $(\hat{i})$ برای سرعت به معنی حرکت در جهت رو به غرب است.

(پ) چون سرعت ثابت است نتیجه می‌گیریم نیروی خالص وارد بر آن برابر صفر است.

۹۱- یک تفنگ ساچمه‌ای، ده ساچمهٔ ۲/۰g را در هر ثانیه با تندی ۵۰۰m/s شلیک می‌کند. ساچمه‌ها توسط دیوار محکمی متوقف می‌شوند. (الف) بزرگی اندازه حرکت هر ساچمه چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی هر ساچمه چقدر است؟ (پ) نیروی میانگین وارد شده توسط جریان ساچمه‌ها به دیوار چقدر است؟ (ت) اگر هر ساچمه به مدت ۰/۶ms با دیوار در تماس باشد نیروی میانگین وارد شده توسط هر ساچمه در حین تماس با دیوار چقدر است؟ (ث) چرا این نیروی میانگین با نیروی میانگین محاسبه شده در قسمت (پ) اختلاف زیادی دارد؟ SSM

حل: (الف) $P = mv = (۲/۰\times ۱۰^{-۳} kg)(۵۰۰ m/s) = ۱/۰ kgm/s$

(ب) $K = \frac{۱}{۲}mv^۲ = \frac{۱}{۲}(۲/۰\times ۱۰^{-۳} kg)(۵۰۰ m/s)^۲ = ۲۵۰ J$

(پ) ساچمه‌ها پس از برخورد به دیوار به حالت سکون در می‌آیند در نتیجه نیروی میانگین وارد بر دیوار از طرف N ساچمه برابر است با

$F_{avg} = \frac{N|\Delta p|}{\Delta t} = \frac{N(mv)}{\Delta t} = \frac{۱۰(۱/۰ kg\cdot m/s)^۲}{۱ s} = ۱۰ N$

(ت) نیروی میانگین که توسط هر ساچمه بر دیوار وارد می‌شود برابر است با

$F_{avg} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{۱/۰ N\cdot s}{۰/۶\times ۱۰^{-۳} s} = ۱/۶۶\times ۱۰^۳ N$

(ث) در قسمت (پ) نیروی میانگین جریان ساچمه‌ها است. زمان بین برخورد ساچمه‌ها باعث کاهش نیرو در این قسمت است.

۹۲- جسمی که هیچ نیروی خارجی به آن وارد نمی‌شود با تندی ۲/۰ m/s در امتداد مثبت محور x حرکت می‌کند. یک انفجار داخلی جسم را به دو نیمه، هر یک به جرم ۴/۰kg تقسیم می‌کند و انرژی جنبشی کل را به مقدار ۱۶J افزایش می‌دهد. قسمت جلو در جهت اولیه به حرکت ادامه می‌دهد. تندی (الف) قسمت عقب و (ب) قسمت جلو، چقدر است؟

حل: (الف) و (ب) نیروی خارجی به دستگاه وارد نمی‌شود لذا پایستگی اندازه حرکت خطی برقرار است یعنی داریم

$P_i = P_f \Rightarrow ۲mv_۰ = mv_۱ + mv_۲$
$v_۱ + v_۲ = ۲(۲/۰ m/s) = ۴/۰ m/s$ (۱)

با توجه به صورت مسئله داریم

$K_f = K_i + ۱۶ \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ + \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ = \frac{۱}{۲}mv_۰^۲ + ۱۶$
$v_۱^۲ + v_۲^۲ = ۱۶$ (۲)

از حل همزمان معادله‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت

$v_۱ = ۰$ و $v_۲ = ۴ m/s$

و

$v_۱ = ۴ m/s$ و $v_۲ = ۰$

۹۳- اتومبیلی به جرم ۱۴۰۰kg با تندی ۵/۳m/s در ابتدا به سمت شمال در جهت مثبت محور y حرکت می‌کند. اتومبیل بعد از دور زدن ۹۰° به سمت راست در جهت مثبت محور x در مدت ۴/۶ s، بر اثر بی‌احتیاطی راننده به درختی برخورد می‌کند و پس از ۳۵۰ ms متوقف می‌شود. بر حسب نمادگذاری بردار- یکه، ضربهٔ وارد شده به اتومبیل، (الف) در حین دور زدن، و (ب) در حین برخورد چقدر است؟ بزرگی نیروی میانگین وارد شده به اتومبیل، (پ) در حین دور زدن، و (ت) در حین برخورد چقدر است؟ (پ) نیروی میانگین در حین دور زدن در چه جهتی است؟ SSM

حل: (الف)

$\vec{P}_{۱i} = m\vec{v}_{۱i} = (۱۴۰۰kg)(۵/۳ m/s)\hat{j} = (۷/۴۲\times ۱۰^۳ kg\cdot m/s)\hat{j}$
$\vec{P}_{۱f} = m\vec{v}_{۱f} = (۱۴۰۰kg)(۵/۳ m/s)\hat{i} = (۷/۴۲\times ۱۰^۳ kg\cdot m/s)\hat{i}$
$\vec{J} = \vec{P}_{۱f} - \vec{P}_{۱i} = (۷/۴۲\times ۱۰^۳ kg\cdot m/s)(\hat{i} - \hat{j})$

(ب) در این حالت اندازه حرکت اولیهٔ اتومبیل $\vec{P}_۱ = ۷/۴۲\times ۱۰^۳ N\cdot s$ و اندازه حرکت نهایی آن صفر است در نتیجه ضربهٔ وارد بر اثر برخورد با درخت برابر است با

$\vec{J} = ۰ - \vec{P}_۱ = (۷/۴۲\times ۱۰^۳ N\cdot s)(-\hat{i})$

(پ) نیروی میانگین وارد بر اتومبیل در حین دور زدن برابر است با

$\vec{F}_{avg} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{۷/۴۲\times ۱۰^۳(\hat{i} - \hat{j})N\cdot s}{۴/۶s} = (۱/۶۱\times ۱۰^۳ N\cdot s)(\hat{i} - \hat{j})$

و بزرگی آن برابر است با

$F_{avg} = ۲/۳\times ۱۰^۳ N$

(ت) $\vec{F}_{avg} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{(۷/۴۲\times ۱۰^۳ N\cdot s)(-\hat{i})}{۳۵۰\times ۱۰^{-۳} s} = (۲/۱\times ۱۰^۴ N)(-\hat{i})$

و بزرگی آن برابر است با

$F_{avg} = ۲/۱\times ۱۰^۴ N$

(ث) $\theta = \tan^{-۱}\frac{-۱/۶۱\times ۱۰^۳}{۱/۶۱\times ۱۰^۳} = -۴۵°$

۹۴- دو قسمت یک سفینهٔ فضایی بر اثر انفجار در پیچهایی که آنها را به هم متصل کرده‌اند از هم جدا می‌شود. جرم دو قسمت ۱۲۰۰kg و ۱۸۰۰kg و بزرگی ضربه‌ای که به هر قسمت وارد می‌شود ۳۰۰N·s است. تندی نسبی جداشدن این دو قسمت چقدر است؟

حل: تندی قسمت ۱ را از رابطهٔ ضربه به دست می‌آوریم

$J_۱ = \Delta P_۱ = m_۱v_۱ \Rightarrow v_۱ = \frac{J_۱}{m_۱} = \frac{۳۰۰}{۱۲۰۰} = ۰/۲۵ m/s$

تندی قسمت ۲ را نیز با توجه به این که $J_۲ = J_۱$ ولی در جهت مخالف است به دست می‌آوریم

$v_۲ = -\frac{J_۲}{m_۲} = -\frac{۳۰۰}{۱۸۰۰} = -۰/۱۶۷ m/s$

در نتیجه تندی نسبی برابر است با

$v_{rel} = v_۱ - v_۲ = ۰/۲۵ - (-۰/۱۶۷) = ۰/۴۱۷ m/s$

۹۵- توپی با جرم ۱۵۰g با تندی ۵/۲m/s به دیوار برخورد می‌کند و فقط با ۵۰٪ انرژی جنبشی خود به عقب برمی‌گردد. (الف) تندی توپ بلافاصله پس از برگشت چقدر است؟ (ب) بزرگی ضربه به دیوار از طرف توپ چقدر است؟ (پ) اگر توپ به مدت ۷/۶ms با دیوار در تماس باشد، در این بازهٔ زمانی میانگین نیروی وارد بر دیوار از طرف توپ، چقدر است؟

حل: (الف) از داده‌های مسئله داریم $K_f = \frac{۱}{۲}K_i$ در نتیجه تندی توپ درست پس از برخورد به دیوار برابر است با

$\frac{۱}{۲}mv_f^۲ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}mv_i^۲\right) \Rightarrow v_f = \frac{v_i}{\sqrt{۲}} = \frac{۵/۲}{\sqrt{۲}} = ۳/۶۹ m/s$

(ب) $J = |\Delta P| = m[v_۲ - (-v_۱)] = m(v_۲ + v_۱)$
$= (۱۵۰\times ۱۰^{-۳} kg)[۳/۶۹ + ۵/۲] m/s = ۱/۳۳ kg\cdot m/s$

(پ) $F_{avg} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{۱/۳۳ N\cdot s}{۷/۶\times ۱۰^{-۳} s} = ۱۷۵ N$

۹۶- یک کرایسلر قدیمی با جرم ۲۴۰۰kg با تندی ۸۰km/h در امتداد جادهٔ مستقیمی حرکت می‌کند. یک اتومبیل فورد با جرم ۱۶۰۰kg و با تندی ۶۰km/h در تعقیب آن است. تندی مرکز جرم دو اتومبیل چقدر است؟

حل:

$v_{com} = \frac{m_۱v_۱ + m_۲v_۲}{m_۱ + m_۲}$
$= \frac{(۲۴۰۰kg)(۸۰ km/h) + (۱۶۰۰kg)(۶۰ km/h)}{۲۴۰۰kg + ۱۶۰۰kg}$
$= ۷۲ km/h$

۹۷- یک قطار باری به جرم $۳/۱۸\times ۱۰^۴$ kg با واگن خدمهٔ قطار که ساکن است برخورد می‌کند. آنها به هم جفت می‌شوند و ۲۷٪ انرژی جنبشی اولیهٔ آنها به انرژی گرمایی، صوت، ارتعاشها و غیره تبدیل می‌شود. جرم واگن خدمه را پیدا کنید. SSM

حل: طبق دادهٔ مسئله داریم $v_{۲i} = ۰$ و

$m_۱v_{۱i} = (m_۱ + m_۲)v_f \Rightarrow v_f = \frac{m_۱}{m_۱ + m_۲}v_{۱i}$

از طرف دیگر ۲۷٪ انرژی جنبشی اولیه تلف شده و لذا نتیجه می‌شود که $K_f = ۰/۷۳K_i$ و

$\frac{۱}{۲}(m_۱ + m_۲)v_f^۲ = ۰/۷۳\left(\frac{۱}{۲}m_۱v_{۱i}^۲\right)$
$\Rightarrow (m_۱ + m_۲)\left(\frac{m_۱}{m_۱ + m_۲}v_{۱i}\right)^۲ = ۰/۷۳ m_۱v_{۱i}^۲$
$\frac{m_۱}{m_۱ + m_۲} = ۰/۷۳ \Rightarrow m_۲ = \frac{m_۱}{۰/۷۳} - m_۱ = \frac{۰/۲۷}{۰/۷۳}m_۱$
$m_۲ = \frac{۰/۲۷}{۰/۷۳}(۳/۱۸\times ۱۰^۴ kg) = ۱/۱۸\times ۱۰^۴ kg$

۹۸- دو قطعه با جرمهای ۱/۰kg و ۳/۰kg توسط فنری به هم متصل‌اند و روی سطح بدون اصطکاک ساکن هستند. آنها به سمت هم سرعت می‌گیرند به طوری که قطعهٔ ۱/۰kg در آغاز با تندی ۱/۷m/s به سمت مرکز جرم که ساکن می‌ماند، حرکت می‌کند. تندی اولیهٔ قطعهٔ دیگر چقدر است؟

حل: نیروی خارجی بر دستگاه وارد نمی‌شود لذا پایستگی اندازه حرکت خطی برقرار است.

$P_i = P_f \Rightarrow ۰ = P_{۱f} + P_{۲f} \Rightarrow ۰ = m_۱v_{۱f} + m_۲v_{۲f}$
$۰ = (۱/۰kg)(۱/۷m/s) + (۳/۰kg)v_{۲f}$
$\Rightarrow v_{۲f} = -۰/۵۷ m/s$

علامت منفی بیانگر این است که قطعه‌ها از دو طرف به سمت مرکز جرم حرکت می‌کنند.

۹۹- مردی به جرم ۷۵kg روی یک ارابهٔ ۳۹kg، که با تندی ۲/۳m/s حرکت می‌کند، قرار دارد. او در حالی که مؤلفهٔ افقی تندی‌اش نسبت به زمین صفر است، از روی ارابه می‌پرد. تغییر حاصل در تندی ارابه با در نظر گرفتن علامت چقدر است؟

حل: چون نیروی افقی بر دستگاه ارابه- مرد وارد نمی‌شود لذا پاستگی اندازه حرکت خطی برقرار است.

$P_i = P_f \Rightarrow (m_۱ + m_۲)v = m_۱v_{۱f} + m_۲v_{۲f}$

با توجه به اینکه هنگام پریدن مرد از روی ارابه مؤلفهٔ افقی تندی آن صفر است لذا داریم

$$(m_1+m_2)v = 0 + m_2 v_{2f} \Rightarrow v_{2f} = \frac{m_1+m_2}{m_2}v$$

$$v_{2f} = \frac{(75\,\text{kg})+(39\,\text{kg})}{39\,\text{kg}}(2.3\,\text{m/s}) = 6.72\,\text{m/s}$$

در نتیجه تغییر سرعت ارابه برابر است با

$$\Delta v_2 = v_{2f} - v = 6.72 - 2.3 = 4.42\,\text{m/s}$$

۱۰۰- یک هستهٔ پرتوزا (مادر) به وسیلهٔ گسیل یک الکترون و یک نوترینو به هستهٔ دیگری (دختر) تبدیل می‌شود. هستهٔ مادر در مبداء دستگاه مختصات xy و در حال سکون بوده است. الکترون با اندازه حرکت خطی $(-1.2\times10^{-22}\,\text{kg}\cdot\text{m/s})\hat{i}$ و نوترینو با اندازه حرکت خطی $(-6.4\times10^{-23}\,\text{kg}\cdot\text{m/s})\hat{j}$ از مبدأ دور می‌شوند. مطلوب است تعیین (الف) بزرگی و (ب) جهت اندازه حرکت هستهٔ دختر. (پ) اگر هستهٔ دختر دارای جرم 5.8×10^{-26} kg باشد، انرژی جنبشی آن چقدر است؟ **ILW**

حل: (الف) نیروی خارجی نداریم لذا رابطه $\vec{P}_i = \vec{P}_f$ برقرار است لذا داریم

$$0 = \vec{P}_e + \vec{P}_v + \vec{P}_d \Rightarrow 0 = (-1.2\times10^{-22})\hat{i} + (-6.4\times10^{-23})\hat{j} + \vec{P}_d$$

$$\vec{P}_d = (1.2\times10^{-22})\hat{i} + (6.4\times10^{-23})\hat{j}$$

و بزرگی اندازه حرکت هستهٔ دختر برابر است با

$$P_d = \sqrt{(1.2\times10^{-22})^2 + (6.4\times10^{-23})^2} = 1.36\times10^{-22}\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

(ب)

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{6.4\times10^{-23}}{1.2\times10^{-22}}\right) = 28.1°$$

که زاویه با جهت مثبت محور x است.

(پ)

$$K_d = \frac{1}{2}m_d v_d^2 = \frac{P_d^2}{2m_d} = \frac{(1.36\times10^{-22})^2}{2(5.8\times10^{-26})} = 1.59\times10^{-19}\,\text{J}$$

۱۰۱- در ترتیب شکل ۹-۲۳، گوی بیلیارد ۱ با تندی $2.2\,\text{m/s}$ با گوی بیلیارد مشابه ۲ که در حال سکون است برخورد کمانه‌ای می‌کند. پس از برخورد، گوی ۲ با تندی $1.1\,\text{m/s}$ و با زاویهٔ $\theta_2 = 60°$ حرکت می‌کند. (الف) بزرگی و (ب) جهت سرعت توپ ۱ را تعیین کنید. (پ) مقدارهای داده شده بیانگر برخورد کشسان هستند یا ناکشسان؟ **SSM**

حل: (الف) از پایستگی اندازه حرکت خطی در دو بعد می‌توان نوشت

$$mv_{1i} = mv_{1f}\cos\theta_1 + mv_{2f}\cos\theta_2$$

$$0 = mv_{1f}\sin\theta_1 - mv_{2f}\sin\theta_2$$

پس از حذف m از طرفین رابطه‌ها آنها را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$v_{1f}\cos\theta_1 = v_{1i} - v_{2f}\cos\theta_2$$

$$v_{1f}\sin\theta_1 = v_{2f}\sin\theta_2$$

دو رابطه را مجذور کرده و جمع کنیم داریم

$$v_{1f}^2 = v_{1i}^2 + v_{2f}^2 - 2v_{1i}v_{2f}\cos\theta_2$$

$$= (2.2)^2 + (1.1)^2 - 2(2.2)(1.1)\cos 60° = 3.63$$

در نتیجه داریم

$$v_{1f} = 1.91\,\text{m/s}$$

(ب) با قرار دادن این مقدار در رابطهٔ دوم پایستگی اندازه حرکت خواهیم داشت

$$v_{1f}\sin\theta_1 = v_{2f}\sin\theta_2 \Rightarrow (1.96)\sin\theta_1 = (1.1)\sin 60°$$

$$\sin\theta_1 = 0.50 \Rightarrow \theta_1 = 30°$$

(پ) چنانچه $K_i = K_f$ باشد برخورد کشسان است در غیر اینصورت برخورد ناکشسان است.

$$K_i = \frac{1}{2}mv_{1i}^2 = \frac{1}{2}m(2.2)^2 = 2.42\,\text{m}$$

$$K_f = \frac{1}{2}mv_{1f}^2 + \frac{1}{2}mv_{2f}^2 = \frac{1}{2}m(1.91)^2 + \frac{1}{2}m(1.1)^2 = 2.42\,\text{m}$$

در نتیجه برخورد کشسان است.

۱۰۲- موشکی با تندی 6.0×10^3 m/s از منظومهٔ شمسی دور می‌شود. موشک، موتورش را روشن می‌کند و گازهای خروجی با سرعت 3.0×10^3 m/s نسبت به موشک خارج می‌شوند. در این زمان جرم موشک 4.0×10^4 kg و شتاب آن $2.0\,\text{m/s}^2$ است. (الف) نیروی پیشران موتور چقدر است؟ (ب) با چه آهنگی برحسب کیلوگرم بر ثانیه، در حین روشن بودن موتور گازهای خروجی بیرون داده شده‌اند؟

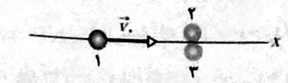
حل: (الف) برای نیروی پیشران داریم

$$F_T = Rv_{\text{rel}} = Ma = (4.0\times10^4\,\text{kg})(2.0\,\text{m/s}^2) = 8.0\times10^4\,\text{N}$$

(ب) از قسمت (الف) داریم

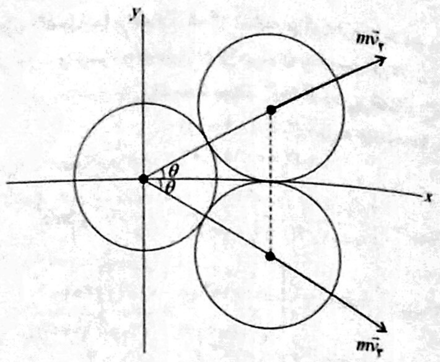
$$R = \frac{F_T}{v_{\text{rel}}} = \frac{8.0\times10^4\,\text{N}}{3000\,\text{m/s}} = 26.67\,\text{kg/s}$$

۱۰۳- سه توپ در دید از بالای شکل ۹-۷۹ مشابه‌اند. توپ ۲ و ۳ با یکدیگر در تماس‌اند و عمود بر مسیر توپ ۱ قرار دارند. سرعت توپ ۱ دارای بزرگی $v_0 = 10\,\text{m/s}$ و به سمت نقطهٔ تماس توپهای ۱ و ۲ است. پس از برخورد، مطلوب است تعیین، (الف) تندی و (ب) جهت سرعت توپ ۲، (پ) تندی و (ت) جهت سرعت توپ ۳، (ث) تندی و (ج) جهت توپ ۱. (راهنمایی: با توجه به نبود اصطکاک، جهت هر ضربه در راستای خطی است که مرکز توپهای برخورد کننده را به هم متصل می‌کند و عمود بر سطحهای برخورد کننده است.)



شکل ۹-۷۹ مسئلهٔ ۱۰۳

حل: با توجه به اینکه سه توپ یکسان‌اند و راهنمایی مسئله توپ ۱ مطابق شکل با دو توپ دیگر برخورد کرده و ضربه وارده به آنها یکسان و در جهت‌های یکسان ولی متقابل است.



از پایستگی اندازه حرکت خطی در راستای x و y و در نظر گرفتن $\theta_1 = \theta_2 = 30°$ داریم

$$mv_0 = mv_1 + mv_2\cos30° + mv_3\cos30°$$

$$0 = 0 + mv_2\sin30° - mv_3\sin30$$

$$v_0 = v_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_3 \qquad (1)$$

$$0 = 0 + v_2 - v_3 \Rightarrow v_2 = v_3 = v \qquad (2)$$

با توجه به رابطه (۲) رابطه (۱) به صورت زیر در می‌آید

$$v_0 = v_1 + \sqrt{3}\,v \Rightarrow 10 = v_1 + \sqrt{3}\,v \Rightarrow v_1 = 10 - \sqrt{3}\,v \qquad (3)$$

از پایستگی انرژی جنبشی می‌توان دومین معادله را نوشت

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_3^2$$

که خواهیم داشت

$$v_0^2 = v_1^2 + 2v^2 \qquad (4)$$

(الف) با جاگذاری v_1 از رابطه (۳) در رابطهٔ (۴) و حل آن برای v خواهیم داشت

$$v = v_2 = 6.93\,\text{m/s}$$

(ب) در امتداد °۳۰ بالای محور x.

(پ) $v_3 = v_2 = 6.93\,\text{m/s}$

(ت) در امتداد °۳۰ زیر محور x.

(ث) با قرار دادن $v = 6.3\,\text{m/s}$ در رابطه (۳) خواهیم داشت

$$v_1 = -2.0\,\text{m/s}$$

(ج) در خلاف جهت محور x.

۱۰۴- در یک بازی بیلیارد، گوی شروع کنندهٔ بازی با گوی دیگری با جرم یکسان و در حال سکون برخورد می‌کند. پس از برخورد گوی اول با تندی $3.50\,\text{m/s}$ و در امتداد زاویهٔ °۲۲/۰ نسبت به مسیر اولش حرکت می‌کند و گوی دوم دارای تندی $2.00\,\text{m/s}$ است. مطلوب است تعیین، (الف) زاویهٔ بین جهت حرکت گوی دوم و جهت اولیهٔ حرکت گوی و (ب) تندی اولیهٔ گوی اول. (پ) آیا انرژی جنبشی (چرخش مرکز جرمها را در نظر نگیرید) پایسته است؟

حل: با توجه به داده‌های مسئله $v_{2i} = 0$ ، $v_{1f} = 3.50\,\text{m/s}$ ، $\theta = 22°$ و $v_{2f} = 2.00\,\text{m/s}$ است. پایستگی اندازه حرکت خطی را در راستای محورهای x و y در نظر می‌گیریم، داریم

$$m_1v_{1i} = m_1v_{1f}\cos\theta_1 + m_2v_{2f}\cos\theta_2 \qquad (1)$$

$$0 = m_1v_{1f}\sin\theta_1 - m_2v_2\sin\theta_2 \qquad (2)$$

(الف) $m_1 = m_2$ است و از رابطه (۲) داریم

$$\sin\theta_2 = \frac{v_1\sin\theta_1}{v_{2f}} = \frac{(3.50\,\text{m/s})\sin22°}{(2.00\,\text{m/s})} = 0.656$$

در نتیجه زاویهٔ انحراف گوی دوم برابر است با

$$\theta_2 = 41°$$

(ب) با مشخص شدن θ_2 ، از رابطه (۱) می‌توان v_{1i} را به دست آورد

$$v_{1i} = (3.50\,\text{m/s})\cos22° + (2.00\,\text{m/s})\cos41°$$

$$= 4.76\,\text{m/s}$$

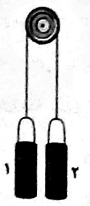
(پ)

$$K_i = \frac{1}{2}mv_{1i}^2 = \frac{1}{2}m(4.76)^2 = 11.33\,\text{m}$$

$$K_f = \frac{1}{2}mv_{1f}^2 + \frac{1}{2}mv_{2f}^2 = \frac{1}{2}m(3.50)^2 + \frac{1}{2}m(2)^2 = 8.12m$$

مشاهده می‌شود که $K_f \neq K_i$ لذا برخورد کشسان نیست.

۱۰۵- در شکل ۹-۸۰ دو ظرف مشابه حاوی شکر به وسیلهٔ سیم بدون وزنی که از روی قرقرهٔ بدون اصطکاکی عبور می‌کند به هم متصل‌اند. جرم سیم و قرقره قابل چشمپوشی است و هر ظرف با شکرش دارای جرم یکسان 500g است و مرکزهای آنها 50mm از هم فاصله دارند و در ارتفاع یکسانی نگهداشته شده‌اند. مطلوب است فاصلهٔ افقی مرکزجرم ظرف ۱ و مرکز جرم دستگاه دو- ظرف، (الف) در آغاز و (ب) پس از آنکه 20g شکر از ظرف ۱ به ظرف ۲ منتقل شود. پس از انتقال و پس از آنکه ظرفها رها شدند، مرکز جرم (پ) در چه جهتی و (ت) با چه بزرگی شتاب، حرکت می‌کند؟



شکل ۹-۸۰ مسئلهٔ ۱۰۵

حل: (الف) مبدأ را در مرکز ظرف اول و جهت مثبت محور x را طبق معمولی به سمت راست انتخاب می‌کنیم. در نتیجه می‌توان نوشت

$$x_{\text{com}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1+m_2} = \frac{0 + (500\,\text{g})(50\,\text{mm})}{(500\,\text{g})+(500\,\text{g})} = 25\,\text{mm}$$

(ب) در این حالت $m_1 = 480\,\text{g}$ و $m_2 = 520\,\text{g}$ است لذا داریم

$$x_{\text{com}} = \frac{0 + (520\,\text{g})(50\,\text{mm})}{(480\,\text{g})+(520\,\text{g})} = 26\,\text{mm}$$

(پ) چون $m_۲$ به سمت پایین و $m_۱$ به سمت بالا حرکت خواهد کرد و چون نیروی گرانش بر دستگاه وارد می‌شود مرکز جرم ساکن باقی نمانده و چون به جرم سنگینتر نزدیک است لذا به سمت پایین حرکت می‌کند.

(ت) ابتدا باید شتاب ظرف‌ها را به دست آورد که بزرگی آن یکسان و برای یکی رو به پایین و دیگری رو به بالا خواهد بود.

$$T - m_۱g = m_۱a$$
$$m_۲g - T = m_۲a$$

دو رابطه را جمع کرده و شتاب را به دست می‌آوریم

$$(m_۲ - m_۱)g = [m_۱ + m_۲]a \Rightarrow a = \frac{m_۲ - m_۱}{m_۱ + m_۲}g$$

$$a = \frac{(۵۲۰\,g)-(۴۸۰\,g)}{(۴۸۰\,g)+(۵۲۰\,g)}(۹/۸\,m/s^۲) = ۰/۳۹\,m/s^۲$$

که $a_۱ = a_۲ = a = ۰/۳۹\,m/s^۲$ است و $a_۱$ به سمت بالا و $a_۲$ به سمت پایین است

$$a_{com} = \frac{m_۱a_۱ + m_۲a_۲}{m_۱ + m_۲}$$
$$= \frac{(۴۸۰\,g)(۰/۳۹\,m/s^۲)+(۵۲۰\,g)(-۰/۳۹\,m/s^۲)}{(۴۸۰\,g)+(۵۲۰\,g)}$$
$$= -۰/۰۱۶\,m/s^۲$$

علامت منفی بیانگر شتاب رو به پایین مرکز جرم است.

۱۰۶- توپی به جرم $۰/۱۵\,kg$ با سرعت $(۵/۰۰\,m/s)\hat{i} + (۶/۵۰\,m/s)\hat{j} + (۴/۰۰\,m/s)\hat{k}$ به یک دیوار عمودی برخورد می‌کند. توپ با سرعت $(۲/۰۰\,m/s)\hat{i} + (۳/۵۰\,m/s)\hat{j} + (-۳/۲۰\,m/s)\hat{k}$ به عقب برمی‌گردد. (الف) تغییر در اندازه حرکت توپ، (ب) ضربهٔ روی توپ و (پ) ضربهٔ روی دیوار چقدر است؟

حل: (الف)
$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_۲ - \vec{P}_۱ = m(\vec{v}_۲ - \vec{v}_۱)$$
$$= (۰/۱۵)[(۲/۰۰\hat{i} + ۳/۵۰\hat{j} - ۳/۲۰\hat{k}) - (۵/۰۰\hat{i} + ۶/۵۰\hat{j} + ۴/۰۰\hat{k})]$$
$$= (-۰/۴۵\hat{i} - ۰/۴۵\hat{j} - ۱/۰۸\hat{k})\,kg\cdot m/s$$

(ب) طبق رابطهٔ ضربه- اندازه حرکت خطی، داریم

$$\vec{J} = \Delta\vec{P} = (-۰/۴۵\hat{i} - ۰/۴۵\hat{j} - ۱/۰۸\hat{k})\,kg\cdot m/s$$

(پ) با توجه به قانون سوم نیوتون داریم

$$\vec{J}_{دیوار} = -\vec{J}_{توپ} = (۰/۴۵\hat{i} + ۰/۴۵\hat{j} + ۱/۰۸\hat{k})\,kg\cdot m/s$$

۱۰۷- در زمان $t = ۰$ نیروی $\vec{F}_۱ = (-۴/۰۰\hat{i} + ۵/۰۰\hat{j})N$ بر ذره‌ای به جرم $۲/۰۰ \times ۱۰^{-۳}\,kg$ که در آغاز ساکن است و نیروی $\vec{F}_۲ = (۲/۰۰\hat{i} - ۴/۰۰\hat{j})N$ بر ذره‌ای به جرم $۴/۰۰ \times ۱۰^{-۳}\,kg$ که در آغاز ساکن است وارد می‌شوند. در زمان $t = ۰$ تا $t = ۲/۰۰\,m/s$ (الف) بزرگی و (ب) زاویهٔ (نسبت به جهت مثبت محور x) جابه‌جایی مرکز جرم دستگاه دو- ذره چقدر است؟ (پ) در $t = ۰$، انرژی جنبشی مرکز جرم چقدر است؟ SSM

حل: (الف) ابتدا از معادلهٔ ۹-۱۴ شتاب مرکز جرم را به دست می‌آوریم و سپس جابه‌جایی آن را می‌توان به دست آورد

$$\vec{F}_{net} = M\vec{a}_{com} \Rightarrow \vec{F}_۱ + \vec{F}_۲ = (m_۱ + m_۲)\vec{a}_{com}$$
$$(-۴/۰۰\hat{i} + ۵/۰۰\hat{j}) + (۲/۰۰\hat{i} - ۴/۰۰\hat{j})$$
$$= (۲/۰۰ \times ۱۰^{-۳} + ۴/۰۰ \times ۱۰^{-۳})\vec{a}_{com}$$

$$\vec{a}_{com} = \frac{-۲/۰۰\hat{i} + ۱/۰۰\hat{j}}{۶/۰۰ \times ۱۰^{-۳}} = \left(-\frac{۱}{۳} \times ۱۰^۳\,\hat{i} + \frac{۱}{۶} \times ۱۰^۳\,\hat{j}\right)m/s^۲$$

$$\Delta\vec{r}_{com} = \frac{۱}{۲}\vec{a}_{com}t^۲ = \frac{۱}{۲}\left[-\frac{۱}{۳} \times ۱۰^۳\,\hat{i} + \frac{۱}{۶} \times ۱۰^۳\,\hat{j}\right](۲ \times ۱۰^{-۳})^۲$$
$$= -\frac{۲}{۳} \times ۱۰^{-۳}\,\hat{i} + \frac{۱}{۳} \times ۱۰^{-۳}\,\hat{j}$$

در نتیجه بزرگی جابه‌جایی مرکز جرم برابر است

$$\Delta r_{com} = \sqrt{\left(-\frac{۲}{۳} \times ۱۰^{-۳}\right)^۲ + \left(\frac{۱}{۳} \times ۱۰^{-۳}\right)^۲}$$
$$= ۰/۷۴۵ \times ۱۰^{-۳}\,m$$

(ب)
$$\theta = \tan^{-۱}\frac{\frac{۱}{۳}}{-\frac{۲}{۳}} = ۱۵۳^\circ$$

(پ)
$$\vec{v}_{com} = \vec{a}_{com}t = \left(-\frac{۱}{۳} \times ۱۰^۳\,\hat{i} + \frac{۱}{۶} \times ۱۰^۳\,\hat{j}\right)(۲ \times ۱۰^{-۳})$$
$$= -\frac{۲}{۳}\hat{i} + \frac{۱}{۳}\hat{j}$$

$$K_{com} = \frac{۱}{۲}Mv_{com}^۲ = \frac{۱}{۲}(۶/۰۰ \times ۱۰^{-۳})\left[\left(-\frac{۲}{۳}\right)^۲ + \left(\frac{۱}{۳}\right)^۲\right]$$
$$= ۱/۶۷ \times ۱۰^{-۳}\,J$$

۱۰۸- توپی به جرم $۰/۵۵۰\,kg$ به طور مستقیم به سمت پایین روی آسفالت فرود می‌آید و با تندی $۱۲/۰\,m/s$ به آن برخورد می‌کند و با تندی $۳/۰۰\,m/s$ به طور مستقیم به سمت بالا می‌رود. محور y را به سمت بالا در نظر بگیرید. بر حسب نماد بردارهای یکه، (الف) تغییر در اندازه حرکت توپ، (ب) ضربهٔ روی توپ و (پ) ضربهٔ روی آسفالت، چقدر است؟

حل: (الف)
$$\Delta\vec{P} = m(\vec{v}_۲ - \vec{v}_۱) = (۰/۵۵\,kg)[(۳\,m/s)\hat{j} - (-۱۲\,m/s)\hat{j}]$$
$$= (۸/۲۵\,kg\cdot m/s)\hat{j}$$

(ب)
$$\vec{J}_{توپ} = \Delta\vec{P} = (۸/۲۵\,kg\cdot m/s)\hat{j}$$

(پ) با توجه به قانون سوم نیوتون داریم
$$\vec{J}_{آسفالت} = -\vec{J}_{توپ} = (-۸/۲۵\,kg\cdot m/s)\hat{j}$$

۱۰۹- برخوردی بین ذرهٔ $۲/۰۰\,kg$ که با سرعت $\vec{v}_۱ = (-۴/۰۰\,m/s)\hat{i} + (-۵/۰۰\,m/s)\hat{j}$ حرکت می‌کند و ذرهٔ $۴/۰۰\,kg$ که با سرعت $\vec{v}_۲ = (۶/۰۰\,m/s)\hat{i} + (-۲/۰۰\,m/s)\hat{j}$ حرکت می‌کند، رخ می‌دهد. برخورد دو جسم را به هم می‌چسباند. سرعت آنها (الف) بر حسب یکاهای بردار- یکه چیست؟ (ب) بزرگی و (پ) زاویه آنها، چقدر است؟

حل: (الف) برخورد کاملاً ناکشسان است. از پایستگی اندازه حرکت خطی داریم

$$m_۱\vec{v}_۱ + m_۲\vec{v}_۲ = (m_۱ + m_۲)\vec{v}$$
$$(۲/۰۰)(-۴/۰۰\hat{i} - ۵/۰۰\hat{j}) + (۴/۰۰)(۶/۰۰\hat{i} - ۲/۰۰\hat{j})$$
$$= (۲/۰۰ + ۴/۰۰)\vec{v}$$
$$\vec{v} = (۲/۶۷\hat{i} - ۳\hat{j})\,m/s$$

(ب) بزرگی $\vec{v}$ برابر است با

$$v = \sqrt{(۲/۶۷)^۲ + (-۳)^۲} = ۴/۰۲\,m/s$$

(پ)
$$\theta = \tan^{-۱}\frac{-۳}{۲/۶۷} = -۴۸/۴^\circ$$

۱۱۰- یک هستهٔ اتمی ساکن در مبداء دستگاه مختصات xy به سه ذره تبدیل می‌شود. ذرهٔ ۱ به جرم $۱۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}\,kg$ با سرعت $(۶/۰۰ \times ۱۰^۶\,m/s)\hat{i}$ از مبدأ دور می‌شود. ذرهٔ ۲ به جرم $۸/۳۵ \times ۱۰^{-۲۷}\,kg$ با سرعت $(-۸/۰۰ \times ۱۰^۶\,m/s)\hat{j}$ از مبدأ دور می‌شود. (الف) بر حسب نمادگذاری بردار- یکه، اندازه حرکت خطی سومین ذره به جرم $۱۱/۷ \times ۱۰^{-۲۷}\,kg$ چقدر است؟ (ب) در این تبدیل چقدر انرژی جنبشی ظاهر می‌شود؟

حل: (الف) با توجه به پایستگی اندازه حرکت خطی داریم

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow ۰ = \vec{P}_۱ + \vec{P}_۲ + \vec{P}_۳$$
$$۰ = (۱۶/۷ \times ۱۰^{-۲۷})(۶ \times ۱۰^۶)\hat{i} + (۸/۳۵ \times ۱۰^{-۲۷})(-۸ \times ۱۰^۶)\hat{j} + \vec{P}_۳$$
$$\vec{P}_۳ = (-۱۰۰/۲ \times ۱۰^{-۲۱}\,\hat{i} + ۶۶/۸ \times ۱۰^{-۲۱}\,\hat{j})\,kg\cdot m/s$$

(ب) با استفاده از $\vec{P}_۳$ می‌توان $\vec{v}_۳$ و سپس بزرگی آن را به دست آورد

$$\vec{P}_۳ = m_۳\vec{v}_۳ \Rightarrow \vec{v}_۳ = \frac{\vec{P}_۳}{m_۳} = (-۸/۵۶ \times ۱۰^۶\,\hat{i} + ۵/۷۱ \times ۱۰^۶\,\hat{j})\,m/s$$
$$v_۳ = \sqrt{(-۸/۵۶)^۲ + (۵/۷۱)^۲} \times ۱۰^۶ = ۱۰/۳ \times ۱۰^۶\,m/s$$

حال انرژی جنبشی کل را حساب می‌کنیم

$$K_{کل} = K_۱ + K_۲ + K_۳ = \frac{۱}{۲}m_۱v_۱^۲ + \frac{۱}{۲}m_۲v_۲^۲ + \frac{۱}{۲}m_۳v_۳^۲$$
$$= \frac{۱}{۲}(۱۶/۷ \times ۱۰^{-۲۷})(۶ \times ۱۰^۶)^۲ + \frac{۱}{۲}(۸/۳۵ \times ۱۰^{-۲۷})(۸ \times ۱۰^۶)^۲$$
$$+ \frac{۱}{۲}(۱۱/۷ \times ۱۰^{-۲۷})(۱۰/۶ \times ۱۰^۶)^۲ = ۱/۱۹ \times ۱۰^{-۱۲}\,J$$

۱۱۱- الکترونی با اتم هیدروژن که در ابتدا ساکن است برخورد کشسان یک بعدی می‌کند. چه درصدی از انرژی جنبشی اولیهٔ الکترون به انرژی جنبشی اتم هیدروژن انتقال می‌یابد. (جرم اتم هیدروژن ۱۸۴۰ برابر جرم الکترون است.)

حل: برخورد کشسان یک بعدی است و به ازای $v_{۲i} = ۰$، داریم

$$v_{۲f} = \frac{۲m_۱}{m_۱ + m_۲}v_{۱i} = \frac{۲m_۱}{m_۱ + ۱۸۴۰m_۱} = \frac{۲}{۱۸۴۱}v_{۱i}$$
$$K_i = K_f$$
$$K_{۱i} + ۰ = K_{۱f} + K_{۲f} \Rightarrow K_{۱i} = K_{۱f} + K_{۲f}$$

$$کسر = \frac{K_{۲f}}{K_{۱f} + K_{۲f}} = \frac{K_{۲f}}{K_{۱i}}$$

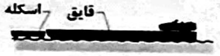
لذا باید انرژی جنبشی اتم هیدروژن $K_{۲f}$ را پس از برخورد و انرژی جنبشی الکترون $K_{۱i}$ را پیش از برخورد حساب کنیم

$$K_{۲f} = \frac{۱}{۲}m_۲v_{۲f}^۲ = \frac{۱}{۲}(۱۸۴۰m_۱)\left(\frac{۲}{۱۸۴۰}v_{۱i}\right)^۲$$
$$= ۱/۰۹ \times ۱۰^{-۳}\,m_۱v_{۱i}^۲$$
$$K_{۱i} = \frac{۱}{۲}m_۱v_{۱i}^۲$$

لذا
$$کسر = \frac{K_{۲f}}{K_{۱i}} = \frac{۱/۰۹ \times ۱۰^{-۳}\,m_۱v_{۱i}^۲}{\frac{۱}{۲}m_۱v_{۱i}^۲} = ۲/۱۸ \times ۱۰^{-۳}$$

یعنی ۰/۲۱۸٪ انرژی جنبشی الکترون به انرژی جنبشی هیدروژن منتقل می‌شود.

۱۱۲- در یک فیلم حادثه‌ای یک اتومبیل مسابقهٔ کوچک (به جرم $۱۵۰۰\,kg$ و طول $۳/۰\,m$) روی یک قایق شناور (به جرم $۴۰۰۰\,kg$ و طول $۱۴\,m$) از یک طرف به طرف دیگر طوری شتاب می‌گیرد که پس از آن اتومبیل بتواند از روی شکاف بین قایق و اسکله پرش کند. شما مشاور فنی برای فیلم هستید. قایق در آغاز با اسکله تماس دارد، همانند شکل ۹-۸۱؛ قایق بدون مقاومت زیادی در آب حرکت می‌کند؛ می‌توان فرض کرد جرم قایق و همچنین اتومبیل به طور یکنواخت توزیع شده است. حساب کنید که پهنای شکاف درست باید چقدر باشد تا اتومبیل پرش موفقیت آمیزی داشته باشد.



شکل ۹-۸۱ مسئلهٔ ۱۱۲

حل: مبدأ را اسکله در نظر می‌گیریم. اتومبیل $(m_۱)$ و قایق $(m_۲)$ را می‌توان جرم نقطه‌ای و تمام جرم را در مرکز آنها تصور کرد لذا فاصله آنها از اسکله بترتیب عبارت است از $x_۱ = (۱۴ - ۱/۵)m$ و $x_۲ = ۷\,m$. مرکز جرم دستگاه اتومبیل- قایق پیش از حرکت اتومبیل برابر است با

$$x_{com} = \frac{m_۱x_۱ + m_۲x_۲}{m_۱ + m_۲} = \frac{(۱۵۰۰)(۱۴ - ۱/۵) + (۴۰۰۰)(۷)}{۱۵۰۰ + ۴۰۰۰}$$
$$= ۸/۵\,m$$

وقتی اتومبیل به سمت اسکله حرکت می‌کند، قایق به سمت عقب حرکت خواهد کرد و چون هیچ نیروی افق بر دستگاه اتومبیل- قایق وارد نمی‌شود مرکز جرم دستگاه ثابت می‌ماند. وقتی اتومبیل به انتهای دیگر قایق می‌رسد جابه‌جایی قایق نسبت به اسکله را d فرض کنیم خواهیم داشت

$$x_{com} = \frac{m_۱x'_۱ + m_۲x'_۲}{m_۱ + m_۲}$$
$$۸/۵ = \frac{(۱۵۰۰)(۱/۵ + d) + (۴۰۰۰)(۷ + d)}{۱۵۰۰ + ۴۰۰۰}$$
$$d = ۳/۰\,m$$

۱۱۳- یک بارکش به جرم ۲۹۰۰kg روی خط آهن با تندی ۲۵۰m/s حرکت می‌کند. در یک نقطهٔ معین، ظرف مستقر در بارکش از روی آن بلند شده، داخل آبی که بین مسیر قرار دارد می‌شود و آب را به یک مخزن خالی که روی بارکش قرار دارد می‌ریزد. با به کار بردن اصل پایستگی اندازه حرکت خطی، تندی بارکش را وقتی ۹۲۰kg آب وارد مخزن شد محاسبه کنید. از نیروهای باز دارنده روی ظرف صرفنظر کنید. **SSM**

حل: چون هیچ نیروی خارجی خالص افقی وجود ندارد، اندازه حرکت خطی افقی پایستار است و داریم

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v$$

$$(2900)(250) = (2900 + 920)v \Rightarrow v = 190\,\text{m/s}$$

۱۱۴- توپی به جرم ۱۴۰g با تندی ۷/۸m/s به یک دیوار عمودی برخورد می‌کند و با تندی یکسانی در جهت مخالف به عقب برمی‌گردد. برخورد ۳/۸۰ms طول می‌کشد. بزرگی (الف) ضربه و (ب) نیروی میانگین وارد به دیوار از طرف توپ، چقدر است؟

حل: (الف) با توجه به رابطهٔ ضربه با تغییر اندازه حرکت خطی می‌توان نوشت

$$J = P_2 - P_1 = mv - m(-v) = 2mv = 2(0/140\,\text{kg})(7/8\,\text{m/s})$$
$$= 2/18\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

(ب)
$$F_{avg} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{2/18\,\text{N}\cdot\text{s}}{3/8\times 10^{-3}\,\text{s}} = 574\,\text{N}$$

۱۱۵- (الف) مرکز جرم دستگاه زمین- ماه از مرکز زمین چقدر فاصله دارد؟ (پیوست پ، جرم زمین و ماه و فاصلهٔ بین آنها را به دست می‌دهد.) (ب) این فاصله چه درصدی از شعاع زمین است؟ **SSM**

حل: (الف) مبدأ را مرکز زمین فرض می‌کنیم:

$$r_{com} = \frac{m_e(r_e) + m_m(r_m)}{m_e + m_m}$$

$$= \frac{0 + (7/36\times 10^{22})(3/82\times 10^{8})}{(5/98\times 10^{24} + 7/36\times 10^{22})} = 4/64\times 10^{6}\,\text{m}$$

(ب)
$$\frac{r_{com}}{r_e} = \frac{(4/64\times 10^{6})}{(6/37\times 10^{6})} = 0/729$$

۱۱۶- اتاقک سوخت به جرم ۵۰۰/۰kg به سفینهٔ فضایی به جرم ۴۰۰/۰kg که با ۱۰۰۰m/s نسبت به ایستگاه فضایی ساکن اصلی حرکت می‌کند، چسبیده است. انفجار کوچکی اتاقک را با تندی ۱۰۰/۰m/s نسبت به تندی جدید سفینهٔ فضایی به سمت عقب می‌فرستد. وقتی اندازه‌گیری توسط شخصی در سفینهٔ فضایی اصلی انجام شود، به دلیل انفجار، انرژی جنبشی اتاقک و سفینهٔ فضایی با چه کسری افزایش می‌یابند؟

حل: پایستگی اندازه حرکت خطی برقرار است چون نیروی انفجار نیروی داخلی است.

$$(m_1 + m_2)v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$(500 + 400)(1000) = (500)(v_1 - 100) + (400)v_1$$

$$v_1 = 1055/6\,\text{m/s}$$

در نتیجه $v_2 = v_1 - 100 = 955/6\,\text{m/s}$. اکنون تغییر نسبی انرژی جنبشی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$\frac{\Delta K}{K_i} = \frac{K_f - K_i}{K_i} = \frac{\left[\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2\right] - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_0^2}{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_0^2}$$

که با قرار دادن مقادیر مربوط خواهیم داشت

$$\frac{\Delta K}{K_i} = 2/57\times 10^{-3}$$

۱۱۷- موشکی به جرم ۶۱۰۰kg برای پرتاب قائم از سطح زمین آماده شده است. اگر تندی گازهای خروجی ۱۲۰۰m/s باشد، چه مقدار گاز باید در هر ثانیه بیرون داده شود، تا نیروی پیشران (الف) برابر وزن موشک باشد و (ب) به موشک شتاب اولیه و به سمت بالای ۲۱m/s² را بدهد. **SSM**

حل: (الف) در حالت کلی وقتی نیروی خارجی نیز وجود دارد، معادله موشک به صورت زیر در می‌آید

$$F_{ext} + F_T = Ma$$

که $F_T = v_{rel}\dfrac{dM}{dt}$ نیروی پیشران است که $\dfrac{dM}{dt}$ را گاهی R می‌نامند. (الف) در این حالت داریم

$$-Mg + Rv_{rel} = Ma = 0$$

$$R = \frac{Mg}{v_{rel}} = \frac{(6100\,\text{kg})(9/8\,\text{m/s}^2)}{1200\,\text{m/s}} = 49/8\,\text{kg/s}$$

(ب) در این حالت $a = 21\ \text{m/s}^2$ است لذا داریم

$$-Mg + Rv_{rel} = Ma \Rightarrow R = \frac{M(g+a)}{v_{rel}}$$

$$R = \frac{(6100\,\text{kg})(9/8\,\text{m/s}^2 + 21\,\text{m/s}^2)}{1200\,\text{m/s}} = 156/6\,\text{kg/s}$$

۱۱۸- یک واگن مسطح راه آهن به جرم ۲۱۴۰kg، که می‌تواند با اصطکاک قابل اغماضی حرکت کند بی حرکت در کنار ایستگاه قرار دارد. یک کشتی‌گیر سامورایی به جرم ۲۴۲kg با تندی ۵/۳m/s در امتداد ایستگاه (موازی مسیر) می‌دود و سپس روی واگن می‌پرد. اگر پس از آن (الف) کشتی‌گیر روی واگن بایستد، (ب) با تندی ۵/۳m/s نسبت به جهت اصلی خودش، بدود و (پ) برگردد و با تندی ۵/۳m/s نسبت به واگن در جهت مخالف اصلی خودش بدود، تندی واگن چقدر خواهد بود؟

حل: (الف) چون هیچ نیروی افقی بر دستگاه کشتی‌گیر- واگن وارد نمی‌شود لذا پایستگی اندازه حرکت خطی برقرار است در این حالت برخورد کاملاً ناکشسان داریم و چنانچه زیرنویس (۱) را برای کشتی‌گیر و زیرنویس (۲) را برای واگن در نظر بگیریم

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v \Rightarrow v = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_1$$

$$v = \frac{(242)(5/3)}{242 + 2140} = 0/54\,\text{m/s}$$

v سرعت واگن پس از پریدن کشتی‌گیر روی آن است.

(ب) وقتی کشتی‌گیر شروع به دویدن می‌کند با توجه به پایستگی اندازه حرکت داریم

$$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

که $\vec{v}_1'$ سرعت کشتی‌گیر نسبت به زمین و $\vec{v}_2'$ سرعت واگن نسبت به زمین است. اما سرعت ورزشکار با توجه به سرعت واگن برابر است با $\vec{v}_1' = \vec{v}_2' + \vec{v}_{rel}$ ، در نتیجه خواهیم داشت

$$m_1\vec{v}_1 = m_1(\vec{v}_2' + \vec{v}_{rel}) + m_2\vec{v}_2'$$

چون حرکت کشتی‌گیر و واگن در یک جهت است لذا می‌توان نوشت

$$(242)(5/3) = (242)(v_2' + 5/3) + (2140)v_2'$$

$$v_2' = 0$$

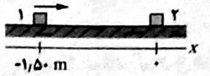
(پ) در این حالت کشتی‌گیر در جهت مخالف واگن حرکت می‌کند در نتیجه داریم $v_1' = v_2' - v_{rel}$. از اصل پایستکی اندازه حرکت خطی خواهیم داشت

$$m_1 v_1 = m_1(v_2' - v_{rel}) + m_2 v_2'$$

$$(242)(5/3) = (242)(v_2' - 5/3) + (2140)v_2'$$

$$v_2' = 1/09\,\text{m/s}$$

۱۱۹- در شکل ۹-۸۲ ، قطعهٔ ۱ با تندی ۰/۷۵m/s در امتداد محور x روی کف بدون اصطکاکی سر می‌خورد. وقتی به قطعهٔ ۲ ساکن می‌رسد، دو قطعه برخورد کشسان می‌کنند. جدول جرم و طول (یکنواخت) قطعه‌ها و همچنین مکان مرکز آنها را در $t=0$ به دست می‌دهد. مرکز جرم دستگاه دو- قطعه (الف) در $t=0$ ، (ب) وقتی دو قطعه در ابتدا تماس پیدا می‌کنند، و (پ) در $t=4/0\,\text{s}$ ، در کجا واقع است؟



شکل ۹-۸۲ مسئلهٔ ۱۱۹

قطعه	جرم (kg)	طول (cm)	مرکز در $t=0$
۱	۰/۲۵	۵/۰	$x = -1/50\,\text{m}$
۲	۰/۵۰	۶/۰	$x = 0$

حل: (الف) با توجه به رابطهٔ مرکز جرم و در $t=0$ داریم

$$x_{com} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(0/25)(-1/5\,\text{m}) + (0/5\,\text{kg})(0)}{0/25\,\text{kg} + 0/5\,\text{kg}}$$
$$= -0/5\,\text{m}$$

(ب) چون چگالی قطعه‌ها یکنواخت است لذا مرکز جرم هر قطعه را در مرکز آن در نظر می‌گیریم. در لحظهٔ تماس دو قطعه

مرکز قطعهٔ ۲ در $x=0$ و مرکز قطعهٔ ۱ در

$$x_1 = -\frac{5+6}{2} = -5/5\,\text{cm}$$

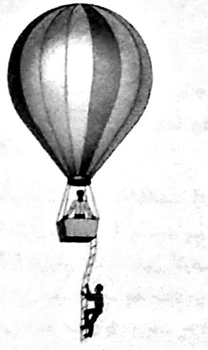
$$x_{com} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(0/25\,\text{kg})(-5/5\,\text{cm}) + (0/5\,\text{kg})(0)}{0/25\,\text{kg} + 0/5\,\text{kg}}$$
$$= -1/83\,\text{cm}$$

(پ) چون نیروی خارجی اعمال نمی‌شود لذا سرعت مرکز جرم ثابت است در نتیجه بهتر است سرعت مرکز جرم را در $t=0$ به دست آورده و سپس با استفاده آن در $t = 4/0\,\text{s}$ مکان مرکز جرم را به دست آورد.

$$v_{com} = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{(0/25\,\text{kg})(0/75\,\text{m/s}) + 0}{0/25\,\text{kg} + 0/5\,\text{kg}}$$
$$= 0/25\,\text{m/s}$$

$$x_{com} = v_{com}t + x_{0,com} = (0/25\,\text{m/s})(4\,\text{s}) + (-0/5)$$
$$= 0/5\,\text{m}$$

۱۲۰- در شکل ۹-۸۳ مردی با جرم ۸۰kg روی نردبانی که از بالونی با جرم کل ۳۲۰kg (شامل سبد مسافر) آویزان است، قرار دارد. بالن در آغاز نسبت به زمین ساکن است. اگر مرد روی نردبان با تندی ۲/۵m/s نسبت به نردبان شروع به بالا رفتن کند، بالون (الف) با چه تندی و (ب) در چه جهتی حرکت می‌کند. (پ) سپس، اگر مرد بالا رفتن را متوقف کند تندی بالون چقدر است؟



شکل ۹-۸۳ مسئلهٔ ۱۲۰

حل: (الف) و **(ب)** چون نیروی خالص وارد بر دستگاه مرد- بالون صفر است لذا پایستگی اندازه حرکت خطی برقرار است. مرکز جرم دستگاه باید ساکن بماند و وقتی مرد به سمت بالا حرکت می‌کند، بالون به سمت پایین حرکت خواهد کرد.

چون در ابتدا دستگاه ساکن است پس $P_i = 0$ و مرد را با زیرنویس ۱ و بالون را با زیرنویس ۳ مشخص کنیم داریم

$$0 = P_f$$

$$0 = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$$

که v_{1f} و v_{2f} سرعت مرد و بالون نسبت به زمین است که سرعت مرد در واقع برابر است با $v_{1f} = v_{2f} + u$ ، که u سرعت مرد نسبت به بالون است.

$$۰ = m_۱(v_{۲f} + u) + m_۲ v_{۲f}$$

$$v_{۲f} = \frac{-m_۱ u}{m_۱ + m_۲} = \frac{-(۸۰)(۲/۵)}{۸۰+۳۲۰} = -۰/۵\text{m/s}$$

که علامت منفی به معنی حرکت بالون به سمت پایین است که قبلاً بحث شد.

(پ) وقتی مرد از حرکت بایستد، $u=۰$ است در نتیجه تندی بالون صفر است.

۱۲۱- ذرهٔ ۱ با جرم ۲۰۰g و تندی ۳/۰۰m/s با ذرهٔ ساکن ۲ با جرم ۴۰۰g برخورد یک بعدی می‌کند. اگر برخورد (الف) کشسان و (ب) کاملاً ناکشسان باشد، بزرگی ضربهٔ وارد بر ذرهٔ ۱ چقدر است؟

حل: (الف) برای برخورد کشسان یک بعد می‌باشد به ازای $v_{۲i}=۰$ از معادلهٔ ۹-۷۵ داریم

$$v_{۱f} = \frac{m_۱ - m_۲}{m_۱ + m_۲} v_{۱i} = \frac{(۰/۲-۰/۴)\text{kg}}{(۰/۲+۰/۴)\text{kg}}(۳\text{m/s}) = -۱\text{m/s}$$

$$J = \Delta P_۱ = m_۱ v_{۱f} - m_۱ v_{۱i} = (۰/۲\text{kg})(-۱\text{m/s}) - (۰/۲\text{kg})(۳\text{m/s})$$
$$= -۰/۸۰\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

که بزرگی آن $۰/۸۰\text{kg}\cdot\text{m/s}$ است.

(ب) برای برخورد کاملاً ناکشسان یک بعدی داریم

$$m_۱ v_{۱i} + m_۲ v_{۲i} = (m_۱ + m_۲)v \Rightarrow m_۱ v_{۱i} = (m_۱ + m_۲)v$$

$$v = \frac{m_۱}{m_۱ + m_۲} v_{۱i} = \frac{۰/۲}{۰/۲+۰/۴}(۳) = ۱\text{ m/s}$$

که $v=۱\text{m/s}$ سرعت نهایی ذره ۱ است

$$J = m_۱ v_{۱f} - m_۱ v_{۱i} = (۰/۲\text{k})[(۱\text{m/s}) - (۳\text{m/s})]$$
$$= -۰/۴۰\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

با بزرگی $۰/۴۰\text{kg}\cdot\text{m/s}$.

۱۲۲- در حین یک مأموریت به ماه، لازم است که تندی سفینهٔ فضایی در وقتی که با تندی ۴۰۰m/s نسبت به ماه حرکت می‌کند به اندازهٔ ۲/۲m/s افزایش یابد. تندی گازهای خروجی موتور موشک ۱۰۰۰m/s نسبت به سفینه است. چه کسری از جرم اولیهٔ سفینهٔ فضایی باید سوزانده و خارج شود تا این افزایش تندی حاصل شود؟

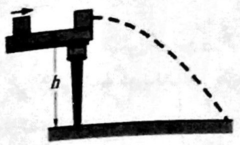
حل:

$$v_f - v_i = v_{\text{rel}} \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right) \Rightarrow ۲/۲ = ۱۰۰۰ \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

$$\frac{M_i}{M_f} = e^{\frac{۲/۲}{۱۰۰۰}} \Rightarrow \frac{M_f}{M_i} = e^{\frac{-۲/۲}{۱۰۰۰}} = ۰/۹۹۷۸$$

$$\frac{M_i - M_f}{M_i} = ۱ - \frac{M_f}{M_i} = ۱ - ۰/۹۹۷۸ = ۰/۰۰۲۲$$

۱۲۳- در شکل ۹-۸۴، یک جعبهٔ کفش به جرم ۳/۲kg روی سطح افقی بدون اصطکاکی سُر می‌خورد و با جعبه کفش دیگری به جرم ۲/۰kg که در آغاز روی لبهٔ میز در ارتفاع $h=۰/۴۰\text{m}$ ساکن است برخورد می‌کند. تندی جعبه ۳/۲kg درست پیش از برخورد ۳/۰m/s است. اگر دو جعبه به خاطر چسبی که روی سطح آنها وجود دارد به هم بچسبند انرژی جنبشی آنها درست پیش از برخورد به کف اتاق چقدر است؟



شکل ۹-۸۴ مسئلهٔ ۱۲۳

حل: مسئله از دو قسمت تشکیل شده ابتدا یک برخورد کاملاً ناکشسان است و پس آن یک حرکت پرتابی که در اولی از پایستگی اندازه حرکت و در قسمت دوم از پایستگی انرژی می‌توان استفاده کرد.

$$m_۱ v_۱ + ۰ = (m_۱ + m_۲)v \Rightarrow$$

$$v = \frac{m_۱ v_۱}{m_۱ + m_۲} = \frac{(۳/۲\text{kg})(۳/۰\text{ m/s})}{(۳/۲\text{kg}) + (۲/۰\text{ kg})} = ۱/۸۴\text{ m/s}$$

$$U_i + K_i = U_f + K_f$$

$$(m_۱ + m_۲)gh + \frac{۱}{۲}(m_۱ + m_۲)v^۲ = ۰ + K_f$$

$$K_f = (۳/۲+۲)(۹/۸)(۰/۴) + \frac{۱}{۲}(۳/۲+۲)(۱/۸۴)^۲$$
$$= ۲۹/۲۸\text{J}$$

۱۲۴- در ترتیب دو- کرهٔ مسئلهٔ نمونهٔ ۹-۱۱، فرض کنید کرهٔ ۱ دارای جرم ۵۰g و ارتفاع اولیهٔ $h_۱ = ۹/۰\text{cm}$ و کرهٔ ۲ دارای جرم ۸۵g است. پس از آنکه کرهٔ ۱ رها شد و با کرهٔ ۲ به طور کشسان برخورد کرد، (الف) کرهٔ ۱ و (ب) کرهٔ ۲ به چه ارتفاعی می‌رسند؟ پس از برخورد (کشسان) بعدی، (پ) کرهٔ ۱ و (ت) کرهٔ ۲ به چه ارتفاعی می‌رسند؟ (*راهنمایی*: مقدارها را گرد نکنید.)

حل: ابتدا از پایستگی انرژی سرعت کره ۱ را پیش از برخورد به دست می‌آوریم

$$m_۱ g h_۱ = \frac{۱}{۲} m_۱ v_۱^۲ \Rightarrow v_۱ = \sqrt{۲gh_۱}$$

$$v_۱ = \sqrt{۲(۹/۸\text{m/s}^۲)(۰/۰۹\text{m})} = ۱/۳۳\text{ m/s}$$

سپس از معادله‌های ۹-۷۵ و ۹-۷۶ به ازای $v_{۲i} = ۰$ داریم

$$v_{۱f} = \frac{m_۱ - m_۲}{m_۱ + m_۲} v_{۱i} = \frac{۵۰-۸۵}{۵۰+۸۵}(۱/۳۳) = -۰/۳۴۵\text{m/s}$$

$$v_{۲f} = \frac{۲m_۱}{m_۱ + m_۲} v_{۱i} = \frac{۲(۵۰)}{۵۰+۸۵}(۱/۳۳) = ۰/۹۸۴\text{ m/s}$$

(الف) کرهٔ ۱ پس از برخورد به عقب برگشته و تا ارتفاع $h'_۱$ بالا می‌رود

$$\frac{۱}{۲} m_۱ v_{۱f}^۲ = m_۱ g h'_۱$$

$$h'_۱ = \frac{v_{۱f}^۲}{۲g} = \frac{(۰/۳۴۵)^۲}{۲(۹/۸)} = ۰/۰۰۶۰۴\text{m} = ۰/۶۰\text{cm}$$

(ب) کرهٔ ۲ نیز پس از برخورد تا ارتفاع $h'_۲$ بالا می‌رود

$$h'_۲ = \frac{v_{۲f}^۲}{۲g} = \frac{(۰/۹۸۴)^۲}{۲(۹/۸)} = ۰/۰۴۹۴\text{m} = ۴/۹۴\text{cm}$$

(پ) و (ت) با توجه به پایستگی انرژی و کشسان بودن برخورد در پایین مسیر، موقعی که کره‌ها به سمت پایین بر می‌گردند در پایین‌ترین نقطه دارای همان سرعت‌های $v_{۱f}$ و $v_{۲f}$ هستند و پس از برخورد نیز کره ۲ به حالت سکون درآمده و کرهٔ ۱ تا ارتفاع ۹/۰cm بالا خواهد رفت.

۱۲۵- جسمی به جرم ۳۰۰۰kg از ارتفاع ۶/۰m به طور قائم سقوط می‌کند و پس از برخورد با یک تودهٔ ۵۰۰kg آن را ۳/۰cm به سنگ کف فرو می‌برد. با فرض اینکه برخورد قطعه-توده یک برخورد کاملاً ناکشسان است، بزرگی نیروی میانگین وارد به توده را از طرف کف در طی ۳/۰cm پایین رفتن پیدا کنید.

حل: از پایستگی انرژی سرعت جسم درست پیش از برخورد با توده از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$v = \sqrt{۲gh} = \sqrt{(۲)(۹/۸)(۶/۰)} = ۱۰/۸۴\text{m/s}$$

اکنون برخورد کاملاً ناکشسان را در نظر می‌گیریم. جسم را با زیرنویس ۱ و توده را با زیرنویس ۲ در نظر می‌گیریم

$$m_۱ v_۱ + m_۲ v_۲ = (m_۱ + m_۲)v$$

$$(۳۰۰۰\text{kg})(۱۰/۸۴\text{ m/s}) + ۰ = (۳۰۰۰\text{kg} + ۵۰۰\text{kg})v$$

$$v = ۹/۲۹\text{m/s}$$

مجموعه قطعه و توده با این سرعت اولیه در سنگ رفته و پس از طی ۳/۰cm متوقف می‌شوند لذا شتاب میانگین کننده میانگین از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$v_f^۲ - v_i^۲ = ۲\bar{a}y \Rightarrow ۰ - (۲/۲۹)^۲ = ۲\bar{a}(۰/۰۳)$$

$$a_{\text{avg}} = -۱۴۳۸\text{m/s}^۲$$

$$F_{\text{avg}} = ma_{\text{avg}} = (۳۵۰۰\text{kg})(-۱۴۳۸\text{ m/s}^۲)$$
$$= -۵/۰\times۱۰^۶\text{ N}$$

۱۲۶- در شکل ۹-۶۵، قطعهٔ ۱ (به جرم ۶/۰kg) با تندی ۸/۰m/s به سمت راست و قطعهٔ ۲ (به جرم ۴/۰kg) با تندی ۲/۰m/s به سمت راست حرکت می‌کند. سطح بدون اصطکاک است و فنر با ثابت فنر ۸۰۰۰N/m به قطعهٔ ۲ متصل است. قطعهٔ ۱ سرانجام به قطعهٔ ۲ می‌رسد و با آن برخورد می‌کند. در لحظه‌ای که قطعهٔ ۱ با تندی ۶/۴m/s به سمت راست حرکت می‌کند، (الف) تندی قطعهٔ ۲ و (ب) انرژی پتانسیل کشسان فنر، چقدر است؟

حل: (الف) هیچ نیروی خارجی بر دستگاه دو قطعه- فنر وارد نمی‌شود لذا پایستگی اندازه حرکت خطی برقرار است.

$$m_۱ v_{۱i} + m_۲ v_{۲i} = m_۱ v_{۱f} + m_۲ v_{۲f}$$

$$(۶/۰)(۸/۰) + (۴/۰)(۲/۰) = (۶/۰)(۶/۴) + (۴/۰)v_{۲f}$$

$$v_{۲f} = ۴/۴\text{m/s}$$

(ب) با توجه به پایستگی انرژی

$$K_{۱i} + K_{۲i} = K_{۱f} + K_{۲f} + U_s$$

$$\frac{۱}{۲}(۶)(۸)^۲ + \frac{۱}{۲}(۴)(۲)^۲ = \frac{۱}{۲}(۶)(۶/۴)^۲ + \frac{۱}{۲}(۴)(۴/۴)^۲ + U_s$$

$$U_s = ۳۸/۴\text{J}$$

۱۲۷- یک الکترون (به جرم $m_۱ = ۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱}\text{ kg}$) و یک پروتون (به جرم $m_۲ = ۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}\text{kg}$) از طریق نیروی الکتریکی یکدیگر را جذب می‌کنند. فرض کنید الکترون و پروتون در آغاز به اندازهٔ $d = ۳/۰\times۱۰^{-۶}\text{ m}$ از هم فاصله دارند و از حال سکون رها شده‌اند. وقتی فاصلهٔ آنها به $۱/۰\times۱۰^{-۶}\text{ m}$ کاهش یابد، نسبت (الف) بزرگی اندازه حرکت خطی الکترون به بزرگی اندازه حرکت خطی پروتون، (ب) تندی الکترون به تندی پروتون و (پ) انرژی جنبشی الکترون به انرژی جنبشی پروتون، چقدر است؟ وقتی جدایی به کاهش ادامه دهد آیا پاسخهای (الف) تا (پ)، افزایش می‌یابند یا کاهش یا تغییر نمی‌کنند؟

حل: (الف) هیچ نیروی خارجی بر دستگاه پروتون- الکترون (نیروی کولنی داخلی است) وارد نمی‌شود لذا پایستگی اندازه حرکت خطی برقرار است یعنی $\bar{P}_e + \bar{P}_p = ۰$

در نتیجه $\left|\frac{P_e}{P_p}\right| = ۱$

(ب) با استفاده از نتیجه قسمت (الف) داریم

$$\frac{P_e}{P_p} = \frac{m_e v_e}{m_p v_p} = ۱ \Rightarrow \frac{v_e}{v_p} = \frac{m_p}{m_e} = \frac{۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}}{۹/۱۱\times۱۰^{-۳۱}} = ۱۸۳۳/۲$$

(پ) با توجه به رابطه $K = \frac{P^۲}{۲m}$ می‌توان نوشت

$$\frac{K_e}{K_p} = \frac{\frac{P_e^۲}{۲m_e}}{\frac{P_p^۲}{۲m_p}} = \frac{m_p}{m_e} = ۱۸۳۳/۲$$

(ت) نتیجه قسمت (الف) با توجه پایستگی اندازه حرکت تغییر نمی‌کند. جواب قسمت (ب) نیز تغییر نمی‌کند چون نسبت آنها متناسب با معکوس جرمشان است.

۱۲۸- یک واگن باری راه آهن به وزن ۲۸۰ kN که با تندی ۱/۵۲m/s در حرکت است به واگن دیگری به وزن ۲۱۰ kN که با تندی ۰/۹۱۴m/s و هم جهت با آن حرکت می‌کند می‌رسد. اگر واگنها به هم جفت شوند، مطلوب است (الف) تندی واگنها پس از برخورد و (ب) انرژی جنبشی هدر رفته در حین برخورد. حال اگر، برخورد کشسان باشد که احتمال آن خیلی کم است، تندی (پ) واگن سبکتر و (ت) واگن سنگینتر، پس از برخورد چقدر است؟

حل: (الف) برخورد کاملاً ناکشسان است و جهت حرکت‌ها یکسان است لذا داریم

$$m_۱ v_۱ + m_۲ v_۲ = (m_۱ + m_۲)v_f$$

که $m=\frac{W}{g}$ و g از طرفین رابطه حذف می‌شود در نتیجه می‌توان نوشت

$$(280\times10^3)(1.52)+(210\times10^3)(0.914) = (280\times10^3+210\times10^3)v_f$$

$$v_f = 1.26\,\text{m/s}$$

(ب) انرژی هدر رفته برابر است با K_f-K_i . لذا داریم

$$K_f-K_i=\frac{1}{2}\left(\frac{m_1+m_2}{g}\right)v_f^2-\left[\frac{1}{2}\frac{m_1}{g}v_{1i}^2+\frac{1}{2}\frac{m_2}{g}v_{2i}^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{280\times10^3+210\times10^3}{9.8}\right)(1.26)^2-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{280\times10^3}{9.8}\right)(1.52)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{210\times10^3}{9.8}\right)(0.914)^2\right]$$

$$=-2266\,\text{J}$$

(پ) برای برخورد کشسان یک بعدی از معادله ۹-۷۶ داریم

$$v_{2f}=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_{1i}+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_{2i}$$

$$=\frac{2(280)}{280+210}(1.52)+\frac{210-280}{280+210}(0.914)=1.61\,\text{m/s}$$

(ت) از معادلهٔ ۹-۷۵ داریم

$$v_{1f}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_{1i}+\frac{2m_2}{m_1+m_2}v_{2i}$$

$$=\frac{280-210}{280+210}(1.52)+\frac{2(210)}{280+210}(0.914)=1.0\,\text{m/s}$$

۱۲۹- جسمی به جرم $3.0\,\text{kg}$ که با تندی $8.0\,\text{m/s}$ در جهت مثبت محور x در حرکت است با جرم M ساکن برخورد کشسان یک بعدی می‌کند. پس از برخورد جسم با جرم M دارای سرعت $6.0\,\text{m/s}$ در جهت مثبت محور x است. جرم M چقدر است؟ SSM

حل: برخورد کشسان یک بعدی است و از معادلهٔ ۹-۷۵ به ازای $v_{2i}=0$ ، $v_{1i}=8.0\,\text{m/s}$ ، $m_1=3.0\,\text{kg}$ ، $m_2=M$ و $v_{1f}=6.0\,\text{m/s}$ داریم

$$v_{1f}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_{1i}\Rightarrow 6.0=\frac{3.0-M}{3.0+M}(8.0)$$

$$M=5.0\,\text{kg}$$

۱۳۰- دو ذرهٔ P و Q که به فاصلهٔ $1.0\,\text{m}$ از هم قرار دارند از حالت سکون رها می‌شوند. P دارای جرم $0.15\,\text{kg}$ و Q دارای جرم $0.30\,\text{kg}$ است. P و Q با نیروی ثابت $1.0\times10^{-2}\,\text{N}$ یکدیگر را جذب می‌کنند. هیچ نیروی خارجی دیگری به دستگاه وارد نمی‌شود. (الف) تندی مرکز جرم P و Q وقتی که $0.50\,\text{m}$ فاصله دارند، چقدر است؟ (ب) در چه فاصله‌ای از محل اولیهٔ ذرهٔ P ، دو ذره با هم برخورد می‌کنند؟

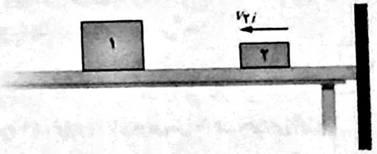
حل: (الف) چون هیچ نیروی خارجی به دستگاه دو ذره وارد نمی‌شود لذا مرکز جرم دستگاه ساکن باقی می‌ماند.

(ب) مبدأ مختصات را در مکان ذرهٔ P در نظر می‌گیریم. مکان مرکز جرم پیش از حرکت برابر است با

$$x_{com}=\frac{m_px_p+m_qx_q}{m_p+m_q}=\frac{0+(0.30)(1.0)}{(0.10)+(0.30)}=0.75\,\text{m}$$

با توجه به اینکه مرکز جرم ساکن باقی می‌ماند لذا دو ذره روی مرکز جرم با هم برخورد می‌کنند.

۱۳۱- در شکل ۹-۸۵ قطعه‌ای به جرم $m_1=6.6\,\text{kg}$ روی میز بدون اصطکاک درازی که یک طرف آن به دیوار متکی است، در حال سکون است. قطعهٔ ۲ به جرم m_2 را بین قطعهٔ ۱ و دیوار قرار می‌دهیم و آن را با تندی ثابت v_{2i} به سمت چپ و به سمت قطعهٔ ۱ به حرکت درمی‌آوریم. مقدار m_2 را طوری تعیین کنید که پس از آنکه m_2 یک بار با m_1 و یک بار با دیوار برخورد کرد دو قطعه با یک سرعت حرکت کنند. فرض کنید که همهٔ برخوردها کشسان هستند (برخورد با دیوار تندی قطعهٔ ۲ را تغییر نمی‌دهد.)



شکل ۹-۸۵ مسئلهٔ ۱۳۱

حل: برخوردها کشسان یک بعدی هستند لذا می‌توان از معادله‌های ۹-۷۵ و ۹-۷۶ استفاده کرد. در اینجا $v_{1i}=0$ است. سمت راست را جهت مثبت محور $+x$ در نظر می‌گیریم.

$$v_{1f}=\frac{2m_2}{m_1+m_2}(-v_{2i})$$

$$v_{2f}=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}(-v_{2i})$$

قطعه ۲ با این سرعت به عقب برگشته و به سمت دیوار می‌رود و پس از برخورد فقط تغییر جهت می‌دهد و داریم $v_{2f}=\frac{m_2-m_1}{m_1+m}v_{2i}$ که با همین سرعت با قطعه ۱ مجدداً برخورد می‌کند که می‌خواهیم $v_{1f}=v_{2f}$ باشد در نتیجه خواهیم داشت

$$v_{1f}=v_{2f}\Rightarrow-\frac{2m_2}{m_1+m_2}v_{2i}=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_{2i}$$

$$-2m_2=m_2-m_1\Rightarrow m_2=\frac{m_1}{3}=\frac{6.6\,\text{kg}}{3}=2.2\,\text{kg}$$

۱۳۲- موشکی به جرم M در امتداد محور x با تندی ثابت $v_i=40\,\text{m/s}$ حرکت می‌کند. انفجار کوچکی موشک را به یک بخش عقب (به جرم m_1) و یک بخش جلو جدا می‌کند، هر دو بخش در امتداد محور x حرکت می‌کنند. سرعت نسبی بین بخشهای عقب و جلو $20\,\text{m/s}$ است. (الف) مقدار کمینهٔ ممکن تندی نهایی v_f بخش جلو چقدر است و (ب) به ازای چه مقدار حدی جرم m_1 رخ می‌دهد؟ (پ) مقدار بیشینهٔ ممکن v_f چقدر است؟ و (ت) به ازای چه مقدار حدی جرم v_f رخ می‌دهد؟

حل:

$$Mv_i=m_1v_1+(M-m_1)v_f$$

از طرفی $v_f-v_1=20$ در نتیجه $v_1=v_f-20$ لذا

$$Mv_i=m_1(v_f-20)+(M-m_1)v_f$$

$$=m_1v_f-20m_1+Mv_f-m_1v_f$$

$$v_f=v_i+20\frac{m_1}{M}=40+20\frac{m_1}{M}$$

(الف) مقدار کمینهٔ تندی نهایی قسمت جلویی $v_f=40\,\text{m/s}$ است.

(ب) این مقدار کمینه وقتی که m_1 به سمت صفر کند حاصل می‌شود.

(پ) مقدار بیشینهٔ v_f برابر $60\,\text{m/s}$ است.

(ت) این مقدار بیشینه به ازای $m_1=M$ رخ می‌دهد.

۱۳۳- یک بستهٔ ساکن به جرم $2.65\,\text{kg}$ منفجر و به سه قسمت تقسیم می‌شود که پس از آن روی کف بدون اصطکاکی سر می‌خورند. بسته در مبداء دستگاه مختصات بوده است. قسمت ۱ دارای جرم $m_1=0.500\,\text{kg}$ و سرعت $(10.0\hat{i}+12.0\hat{j})\text{m/s}$ است. قسمت ۲ دارای جرم $m_2=0.750\,\text{kg}$ و تندی $14.0\,\text{m/s}$ است و با زاویهٔ $110°$ حرکت می‌کند. (به طور پاد ساعتگرد نسبت به جهت مثبت محور x). (الف) تندی قسمت ۳ چقدر است؟ (ب) در چه جهتی حرکت می‌کند؟

حل: از اصل پایستگی اندازه حرکت خطی داریم

$$0=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+m_3\vec{v}_3$$

اما ابتدا باید $\vec{v}_2$ و m_3 را محاسبه کرد

$$\vec{v}_2=v_2\cos110°\hat{i}+v_2\sin110°\hat{j}=-4.8\hat{i}+13.2\hat{j}\,\text{m/s}$$

$$m_3=m-m_1-m_2=(2.56-0.50-0.75)\text{kg}=1.40\,\text{kg}$$

(الف)

$$0=(0.50)(10.0\hat{i}+12.0\hat{j})+(0.75)(-4.8\hat{i}+13.2\hat{j})+(1.40)\vec{v}_3$$

$$\vec{v}_3=(-1.01\,\text{m/s})\hat{i}+(-11.36\,\text{m/s})\hat{j}$$

و بزرگی $\vec{v}_3$ برابر است با

$$v_3=\sqrt{(-1.01)^2+(-11.36)^2}=11.4\,\text{m/s}$$

(ب)

$$\theta=\tan^{-1}\frac{-11.36}{-1.01}=84.9° \text{ یا } 264.9°$$

که چون $\vec{v}_3$ در ناحیهٔ ۳ قرار دارد پس جواب $\theta=264.9°$ قابل قبول است.

۱۳۴- ذرهٔ ۱ با جرم $3.0\,\text{kg}$ و سرعت $(5.0\,\text{m/s})\hat{i}$ با ذرهٔ ۲ با جرم $2.0\,\text{kg}$ و سرعت $(-6.0\,\text{m/s})\hat{i}$ برخورد کشسان یک بعدی می‌کند. پس از برخورد، سرعت (الف) ذرهٔ ۱ و (ب) ذرهٔ ۲، چقدر است؟

حل: (الف) برای برخورد کشسان یک بعدی داریم

$$\vec{v}_{1f}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i}+\frac{2m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{2i}$$

$$=\frac{(3.0)-(2.0)}{(3.0)+(2.0)}(5.0\hat{i})+\frac{2(2.0)}{(3.0)+(2.0)}(-6.0\hat{i})$$

$$=-3.8\hat{i}\,\text{m/s}$$

(ب)

$$\vec{v}_{2f}=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i}+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{2i}$$

$$=\frac{2(3.0)}{(3.0)+(2.0)}(5.0\hat{i})+\frac{(2.0)-(3.0)}{(3.0)+(2.0)}(-6.0\hat{i})$$

$$=7.2\hat{i}\,\text{m/s}$$

۱۳۵- در لحظهٔ معینی، چهار ذره دارای مختصات xy و سرعتهای داده شده در جدول زیر هستند. در آن لحظه، مختصات (الف) x و (ب) y مرکز جرم آنها چیست و (پ) سرعت مرکز جرم آنها چقدر است؟

ذره	جرم (kg)	مکان (m)	سرعت (m/s)
۱	۲/۰	۰ , ۰/۳۰	$-9.0\hat{j}$
۲	۴/۰	۳/۰ , ۰	$6.0\hat{i}$
۳	۳/۰	۰ , -۲/۰	$6.0\hat{j}$
۴	۱۲	-۱/۰ , ۰	$-2.0\hat{i}$

حل: (الف)

$$x_{com}=\frac{\sum m_ix_i}{\sum m_i}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3+m_4x_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}$$

$$=\frac{0+(4)(3)+0+(12)(-1)}{2+4+3+12}=0$$

(ب)

$$y_{com}=\frac{\sum m_iy_i}{\sum m_i}=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3+m_4y_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}$$

$$=\frac{(2)(3)+0+(3)(-2)+0}{2+4+3+2}=0$$

(پ)

$$\vec{v}_{com}=\frac{\sum m_i\vec{v}_i}{\sum m_i}=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+m_3\vec{v}_3+m_4\vec{v}_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}$$

$$=\frac{(2)(-9\hat{j})+(4)(6\hat{i})+(3)(6\hat{j})+(12)(-2\hat{j})}{2+4+3+2}=0$$

۱۳۶- شکل ۹-۸۶ دو سورتمهٔ یخی $22.7\,\text{kg}$ را نشان می‌دهد که به فاصلهٔ کمی از یکدیگر و پشت سر هم قرار گرفته‌اند. یک گربهٔ ۳/۶۳ کیلوگرمی که در آغاز در یکی از سورتمه‌ها ایستاده است روی سورتمهٔ دیگر می‌پرد و سپس دوباره به سورتمهٔ اول برمی‌گردد. گربه هر دو پرش را با تندی $3.05\,\text{m/s}$ نسبت به یخ انجام می‌دهد. تندیهای نهایی سورتمه‌ها را پیدا کنید

شکل ۹-۸۶ مسئلهٔ ۱۳۶

حل: (الف) در هر دو پرش گربه پایستگی اندازه حرکت افقی برقرار است. زیرنویس ۱ را برای گربه و زیرنویس ۲ را برای سورتمه سمت چپ و زیرنویس ۳ را برای سورتمهٔ سمت راست به کار می‌بریم.

در ابتدا سورتمه سمت و گربه روی آن ساکن هستند و سپس گربه پرش می‌کند.

$$\circ = m_{۱}v_{۱} + m_{۲}v_{۲} \Rightarrow v_{۲} = -\frac{m_{۱}}{m_{۲}}v_{۱} = -\frac{۳/۶۳}{۲۲/۷}(۳/\circ۵\,\mathrm{m/s})$$

$$v_{۲} = -\circ/۴۹\,\mathrm{m/s}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که این سورتمه به این تندی به سمت چپ حرکت می‌کند. اکنون گربه روی سورتمهٔ سمت راست فرود می‌آید در نتیجه می‌توان نوشت

$$m_{۱}v_{۱} = (m_{۱} + m_{۳})v \Rightarrow v = \frac{m_{۱}}{m_{۱} + m_{۳}}v_{۱}$$

v سرعت سورتمه سمت راست و گربه روی آن پس از پریدن گربه روی آن است.

$$v = \frac{۳/۶۳}{۳/۶۳ + ۲۲/۷}(۳/\circ۵\,\mathrm{m/s}) = \circ/۴۲\,\mathrm{m/s}$$

علامت مثبت نشان می‌دهد که سورتمهٔ سمت راست به همراه گربه روی آن به طرف راست حرکت می‌کند.

در این مرحله گربه به عقب برگشته و با سرعت $۳/\circ۵\,\mathrm{m/s}$ نسبت به یخ پرش می‌کند. سرعت گربه عملاً برابر است با $v'_{۱} = \circ/۴۲ - ۳/\circ۵ = -۲/۶۳\,\mathrm{m/s}$ ، که می‌توان آن را در رابطهٔ زیر جایگزین کرد

$$(m_{۱} + m_{۳})v = m_{۱}v'_{۱} + m_{۳}v'_{۳}$$

$v'_{۳}$ سرعت سورتمه سمت راست پس از پریدن گربه است

$$(۳/۶۳ + ۲۲/۷)(\circ/۴۲) = (۳/۶۳)(-۲/۶۳) + (۲۲/۷)v'_{۳}$$

$$v'_{۳} = \circ/۹۷۵\,\mathrm{m/s}$$

(ب) در این لحظه سورتمه سمت چپ با سرعت $\circ/۴۹\,\mathrm{m/s}$ به طرف چپ در حرکت است که گربه با سرعت $۳/\circ۵\,\mathrm{m/s}$ و هم جهت با حرکت سورتمه روی آن می‌پرد که می‌توان نوشت

$$m_{۱}v_{۱} + m_{۲}v_{۲} = (m_{۱} + m_{۲})v'_{۲}$$

$$(۳/۶۵)(۳/\circ۵) + (۲۲/۷)(\circ/۴۹) = (۳/۶۵ + ۲۲/۷)v'_{۲}$$

$$v'_{۲} = \circ/۸۴\,\mathrm{m/s}$$